# GENEL FİZİK II
# DERS NOTLARI

**Hazırlayanlar:**

**Prof. Dr. Mustafa POLAT**
**Prof. Dr. Leyla TATAR YILDIRIM**

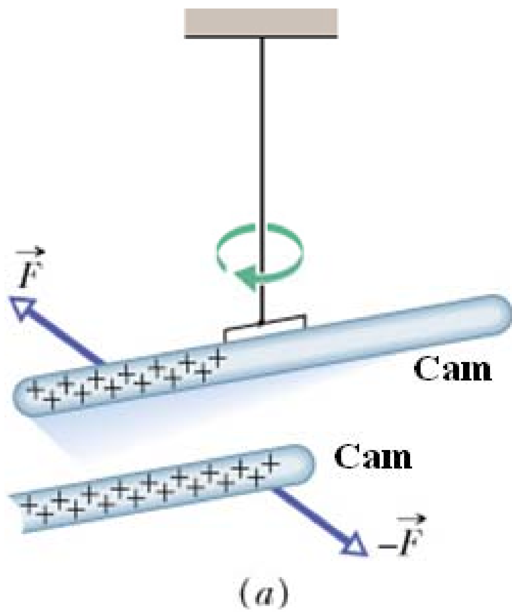
**2012**

# BÖLÜM-21
# Elektrik Yükü

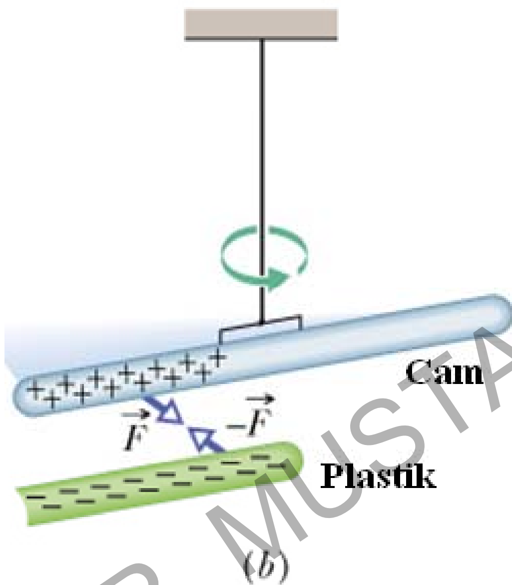
Bu bölümde, maddenin özelliklerinden birisi olan "elektrik yükü" ile tanışacağız.

Atomu meydana getiren elektron, proton ve nötron' nun yüklerini öğreneceğiz ve devamında da şu konulara değineceğiz:

- **Elektrik yükünün çeşitleri**
- **İki yük arasındaki kuvvet (Coulomb yasası)**
- **Yükün kuantalığı**
- **Yükün korunumu**

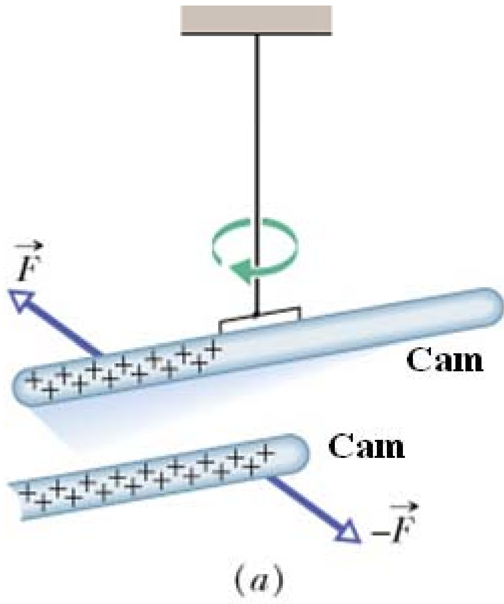



Bir kumaş parçası ile ovuşturulan kehribarın tüy gibi hafif nesneleri çektiği antik çağlardan beri bilinen bir şeydir. Bu olgu, maddenin yeni bir özelliği olan "elektrik yükü" ile ilgilidir. Birçok deney, iki tür elektrik yükünün varlığını göstermiştir: pozitif (renk kodu: kırmızı) ve negatif (renk kodu: siyah). "pozitif" ve "negatif" isimleri Benjamin Franklin tarafından verilmiş isimlerdir.



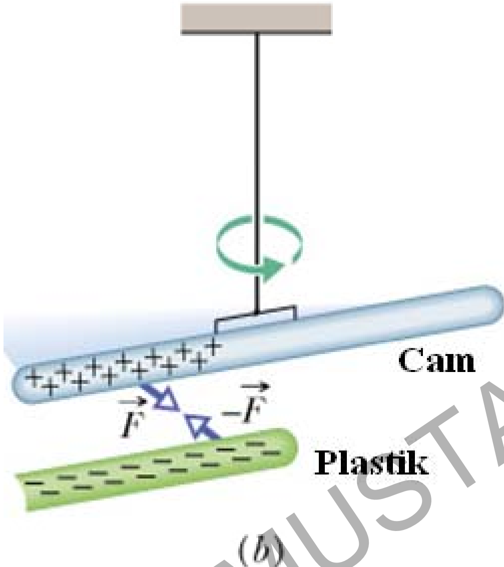

Cam bir çubuğu ipek bir kumaşla ovuşturduğumuzda, ikisi de elektrik yükü kazanır. Cam çubuğun kazandığı yükün işareti **pozitif** olarak tanımlanır.

Benzer şekilde, plastik bir çubuğu bir kürk ile ovuşturduğumuzda, ikisi de elektrik yükü kazanır. Plastik çubuğun kazandığı yükün işareti **negatif** olarak tanımlanır.




Yüklü cisimlerle yapılan bir çok deneysel çalışmalardan elde edilen sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

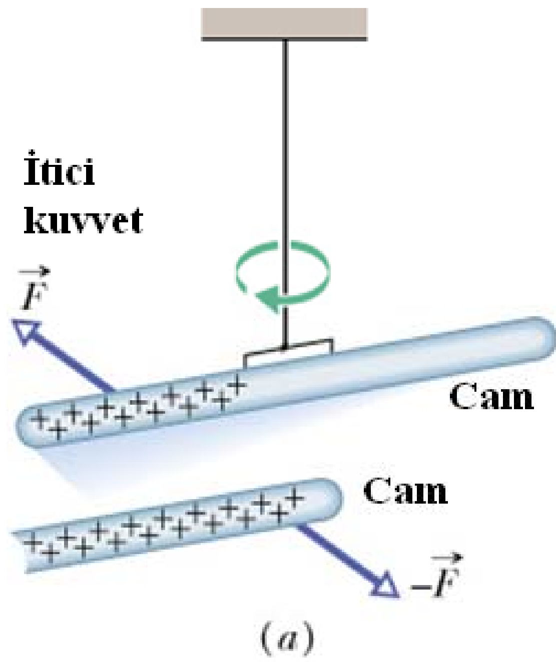
1. Aynı işaretli yükler (her ikisi de pozitif veya negatif) birbirlerini iterler (Şekil-*a*).
2. İşaretleri farklı olan yükler (biri pozitif, diğeri negatif) birbirlerini çekerler (Şekil-*b*).




Yükünün işareti bilinen bir cisimle, yükünün işareti bilinmeyen cisim arasındaki etkileşme kuvvetinin yönünden yararlanarak, bilinmeyen cismin yükünün işaretini belirleyebiliriz.

**Aynı işaretli yükler birbirini iter.**

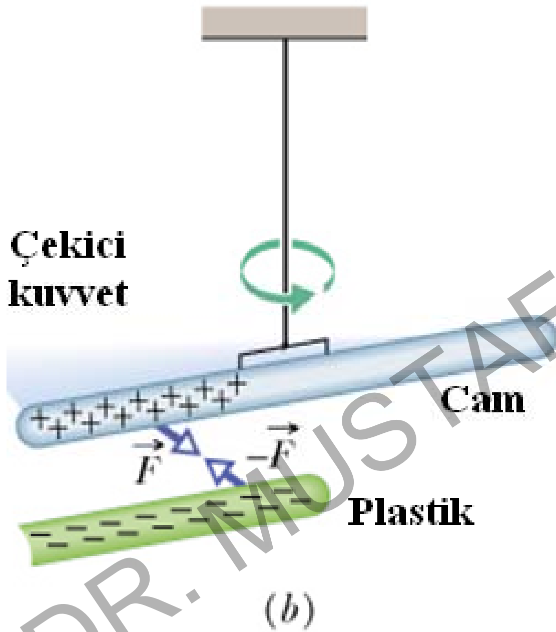
**Zıt işaretli yükler birbirini çeker.**




# Yöntem:

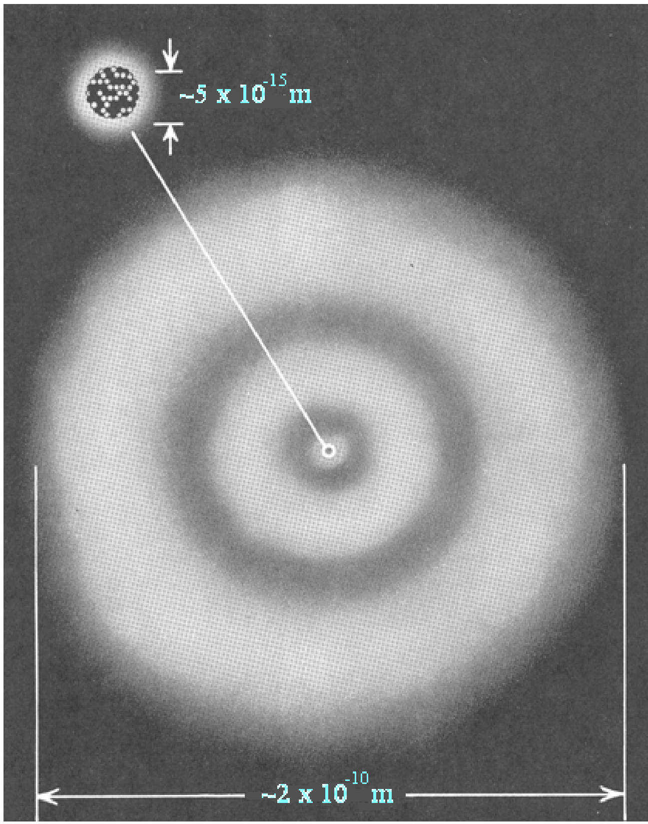
İpek bir kumaşla ovuşturulan cam çubuğun pozitif yüklü olduğunu biliyoruz. Bu çubuğu, yükü kaybolmayacak ve etrafında serbestçe dönebilecek şekilde ortasından asalım. Sonra da, yükünü bilmediğimiz bir cismi cam çubuğa doğru yaklaştıralım.

Mümkün olan iki durum söz konusudur:




**Şekil- *a*:** İki cisim birbirini iter. Bu durumda bilinmeyen yük pozitif işaretlidir.

**Şekil-*b*:** İki cisim birbirini çeker. Bu durumda bilinmeyen yük negatif işaretlidir.




Benjamin Franklin zamanında (18. yy) elektrik yükünün bir çeşit ağırlıksız, sürekli akışkan olduğu kabul ediliyordu. 20. yy başlarında Ernest Rutherford' un atomun yapısı üzerinde yürüttüğü araştırmalar, maddenin ne şekilde meydana geldiğini ortaya koydu ve bileşenlerinin sahip oldukları yüklerin belirlenmesini sağladı.

Atomlar elektronlardan ve çekirdekten oluşur. Çekirdeğin kendisi de, proton ve nötronlardan oluşur.

Atomun çapı ~ $5\times10^{-10}$ m.
Çekirdeğin çapı ~ $5\times10^{-15}$ m.

Elektronlar **negatif** yüklü, protonlar **pozitif** yüklü, nötronlar ise **yüksüzdür**.

Bu durumda elektrik yükü, atomu oluşturan parçacıkların (elektron, proton, nötron) temel bir özelliğidir.

## Atomik Bileşenlerin Kütleleri ve Yükleri:

Nötron (n) : Kütle $m = 1.675\times10^{-27}$ kg; Yük $q = 0$
Proton (p) : Kütle $m = 1.673\times10^{-27}$ kg; Yük $q = +1.602\times10^{-19}$ C
Elektron (e) : Kütle $m = 9.11\times10^{-31}$ kg; Yük $q = -1.602\times10^{-19}$ C

**Not-1:** Elektron ve protonun yükleri için, sırasıyla, "-e" ve "+e" sembolleri kullanılır. Bunlar **temel yük** olarak bilinirler .

**Not-2:** Bir atomdaki elektron ve proton sayıları eşitse, atom elektriksel olarak "**nötr**" olarak adlandırılır. Bu sayı "**atom numarası (Z)**" dır.

**Not-3:** Bir atomdaki proton ve nötron sayılarının toplamı ise "**kütle numarası (A)**" dır.

**Gösterim:** $^{235}_{92}U$

$Z = 92$ = elektron/proton sayısı

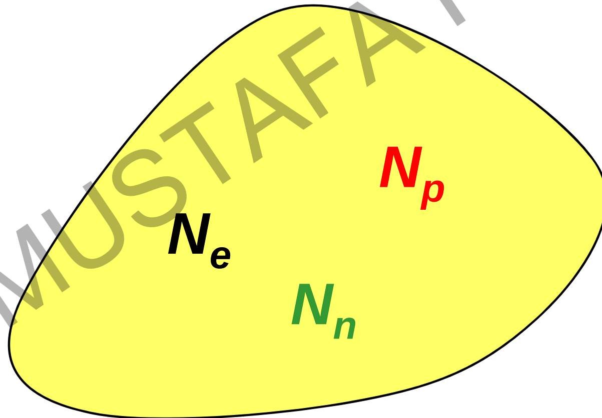
$A = 235$ =proton + nötron sayısı

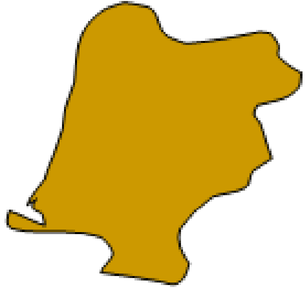
## Yükün Quantalanması :

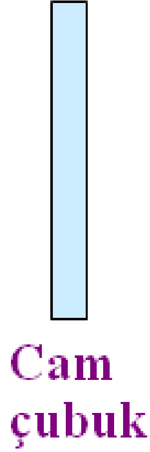
Bir nesnenin toplam yükü, o nesnedeki temel parçacıkların sayısına (elektron, proton, nötron) bağlıdır. Elektron sayısı $N_e$, proton sayısı $N_p$ ve nötron sayısı $N_n$ olan bir nesnenin net yükü,

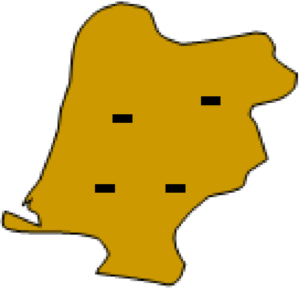
$$Q_{\text{net}} = -eN_e + eN_p + 0N_n = e\left(N_p - N_e\right) = ne$$

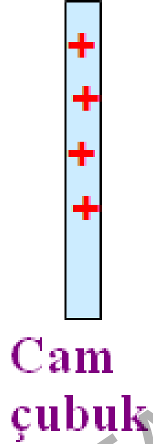
olur. Burada, $n = \left(N_p - N_e\right)$ ve tamsayıdır. Bu, net yükün elektron yükünün tamsayı katları kadar olacağını gösterir. Yani yük **quantalı**dır.





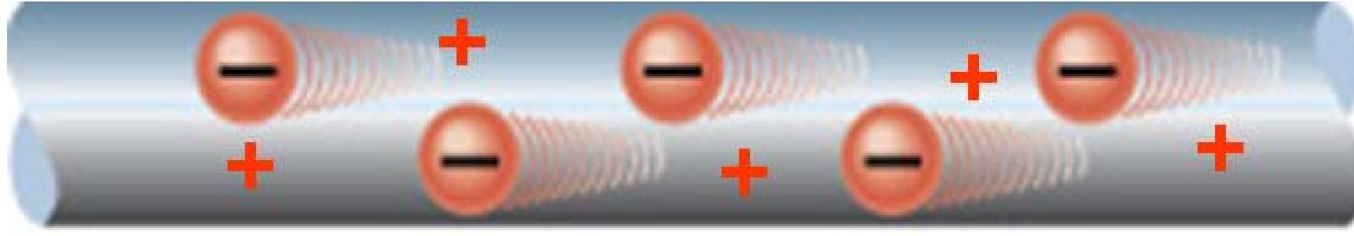




## Yükün Korunumu:

Her ikisi de yüksüz olan cam bir çubuk ile ipek bir kumaşımız olsun. Cam çubuğu ipek kumaşla ovuşturduğumuzda, cam çubuk pozitif yüklenir. Aynı anda, toplam yük sıfır olacak şekilde, ipek kumaş da eşit miktarda negatif olarak yüklenir. Buradan, ovuşturma işleminin herhangi bir yük oluşturmadığı ancak, birinden diğerine yük akışı sağladığı anlaşılır. Yükün korunumu şöyle özetlenebilir: "Herhangi bir işlemin öncesindeki toplam yük, işlemden sonraki toplam yüke eşittir".

Önceki Net Yük = Sonraki Net Yük

$$Q_i = Q_f$$

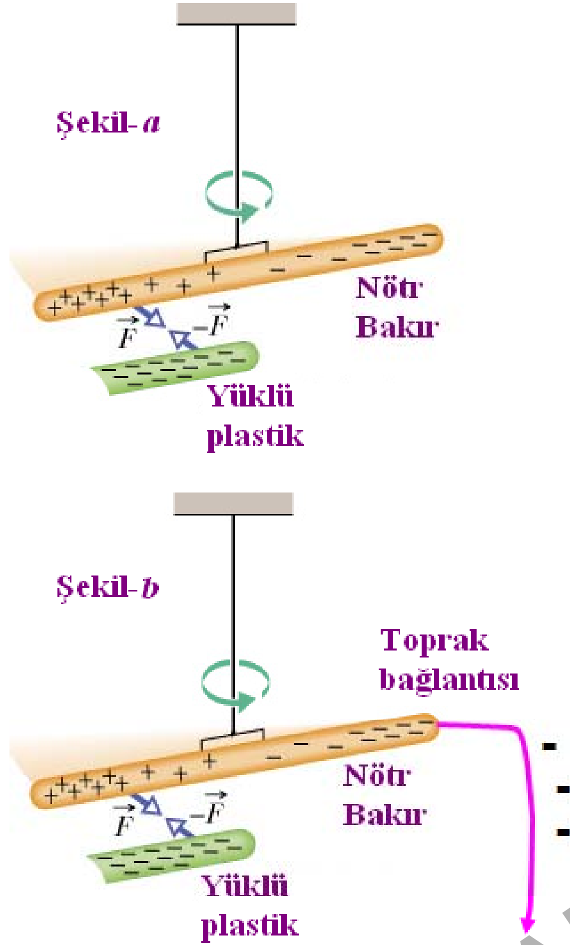


## İletkenler ve Yalıtkanlar :

**İletkenler,** yüklerin içlerinde serbestçe dolaşabilmelerine izin veren malzemelerdir. Bakır, aliminyum, civa bunlardan bazılarıdır.

**Yalıtkanla,** yüklerin içlerinde serbestçe dolaşmalarına izin vermeyen malzemelerdir. Plastik, lastik, cam, seramik bunlardan bazılarıdır.

İletkenlerde, atomun son yörüngesindeki bir veya daha fazla elektron kolayca atomdan ayrılıp serbest hale gelebilir ve iletken içinde hareket eder. Bunlara iletim elektronları diyoruz. İletim elektronları geride iyon dediğimiz pozitif yüklü atomlar bırakırlar. İletkenin içinde sadece iletim elektronları serbestçe hareket edebilir, pozitif yüklü iyonların konumları değişmez. Yalıtkanlar ise iletim elektronu içermezler.

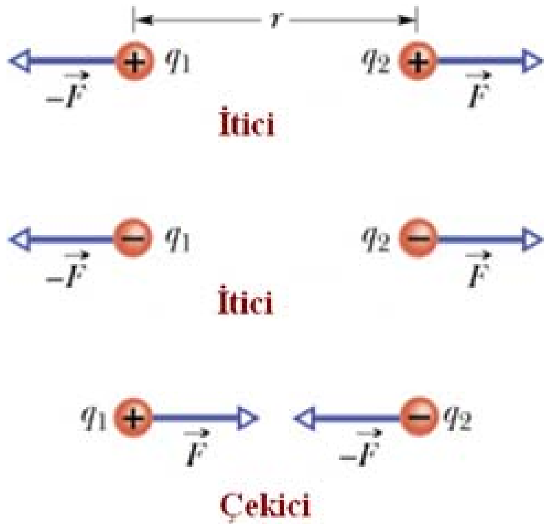



## Bir İletkeni İndüksiyon Yoluyla Yüklemek :

Şekil-*a*' da bir iletken yaltkan bir iple asılmıştır ve başlangıçta yüksüzdür. Negatif yüklü plastik çubuğu yavaşça yaklaştıralım. Plastik yalıtkandır ve üzerindeki negatif yükler hareketsizdir. Ancak, iletken içindeki negatif yükleri sağ uca doğru itecektir. İletkenin sol ucunda elektron boşluğu meydana geldinden pozitif yüklenmiş olacaktır. Şekil-*b* 'de toprağa bağlı bir iletim yolu oluşturulmuş, böylece elektronların toprağa akması sağlanmıştır. Toprak bağlantısını iptal eder ve plastik çubuğu uzaklaştırırsak, iletken çubuk pozitif yüklenmiş olacaktır.

**Not - 1 :** İletkenhe üzerinde indüklenen yük, plastik çubuğun yükü ile ters işaretlidir.

**Not - 2 :** Plastik çubuk aynı amaçlı çok defa kullanılabilir.




$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

## Coulomb Yasası :

Aralarındaki mesafe $r$ olan, $q_1$ ve $q_2$ yükleri olsun. Bu yükler birbirlerine, aşağıda özellikleri verilen kuvvetler uygularlar.

**1.** Kuvvetler, yükleri birleştiren doğru boyuncadır.

**2.** Yükler aynı işaretliyse, kuvvet iticidir.
Yükler zıt işaretliyse, kuvvet çekicidir.

**3.** Kuvvetin büyüklüğü, Coulomb Yasası olarak bilinen

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ olmak üzere, $F = k\dfrac{|q_1||q_2|}{r^2}$ eşitliği ile verilir.

Burada $\varepsilon_0$, boşluğun veya havanın elektriksel geçirgenliği olarak bilinir ve değeri $8.85\times10^{-12}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$ dir.

Coulomb kuvveti ve Newton'un gravitasyonel kuvveti aynı formdadır. Tek fark, gravitasyonel kuvveti her zaman çekici bir kuvvettir. Buna karşın Coulomb kuvveti, yüklerin işaretine bağlı olarak çekici veya itici olabilir.

**Örnek :** Hidrojen atomunda çekirdekteki proton ile yörüngedeki elektron arasındaki uzaklık ortalama $5.3\times10^{-11}$ m' dir. Bunlar arasındaki elektriksel ve gravitasyonel kuvvetlerin büyüklüklerini bulunuz.

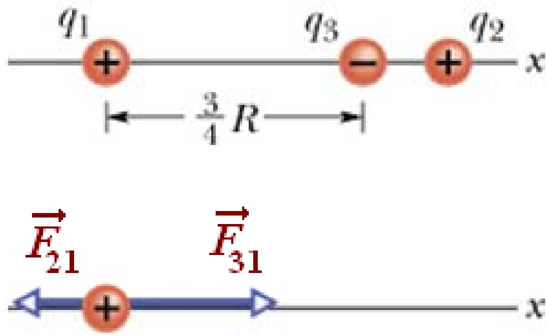
Coulomb yasasından, bu iki yük arasındaki kuvvetin büyüklüğü:

$$F_E = k\frac{|e|^2}{r^2} = 9\times10^9 \frac{\left|1.6\times10^{-19}\right|^2}{\left(5.3\times10^{-11}\right)^2} = 8.2\times10^{-8} \text{ N.}$$

İki kütle arasındaki çekim kuvvetinin büyüklüğü, Newton' un gravitasyon yasasından:

$$F_g = G\frac{m_e m_p}{r^2} = 6.7\times10^{-11}\frac{\left(9.11\times10^{-31}\right)\cdot\left(1.67\times10^{-27}\right)}{\left(5.3\times10^{-11}\right)^2} = 3.6\times10^{-47} \text{ N.}$$

Atomik boyutta, parçacıklar arasındaki kütle çekim kuvveti önemsenmeyecek düzeyde küçüktür.




# Coulomb Yasası ve Üstüste Binme İlkesi :

Bir yük grubunun belirli bir yüke uyguladığı net kuvvet, tüm yüklerin uyguladığı kuvvetlerin vektörel toplamına eşittir.

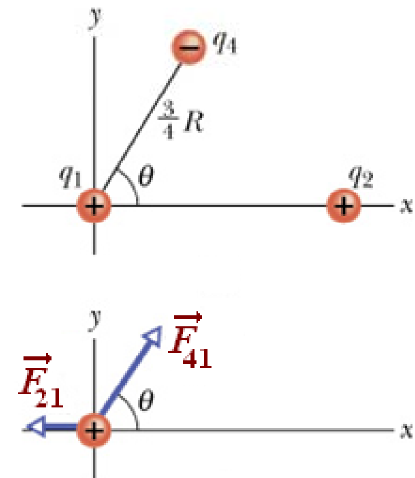
Örneğin, $q_2$ ve $q_3$ yükleri tarafından $q_1$ yüküne uygulanan net kuvvet ($\vec{F}_1$),

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

ile verilir. Burada, $\vec{F}_{21}$ ve $\vec{F}_{31}$ sırasıyla $q_2$ ve $q_3$ yüklerinin $q_1$ yüküne uyguladığı kuvvetlerdir. $q_1$ yüküne etkiyen $n$ tane nokta yük olması durumunda ise net kuvvet,

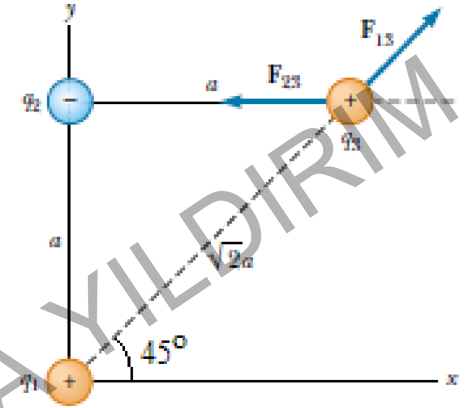
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \ldots + \vec{F}_{n1} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{i1}$$

ile ifade edilir.




$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}$$

**Örnek :** Şekildeki gibi üç nokta yük, dik kenarlarının uzunluğu $a$ = 10 cm olan ikizkenar üçgenin köşelerine yerleştirilmiştir. $q_1 = q_3 = 5\ \mu$C ve $q_2 = -2\ \mu$C olduğuna göre $q_3$ yüküne etkiyen net kuvveti bulunuz.




Coulomb yasasından, $q_1$ ve $q_2$ yüklerinin $q_3$ yüküne uyguladıkları kuvvetlerin büyüklükleri:

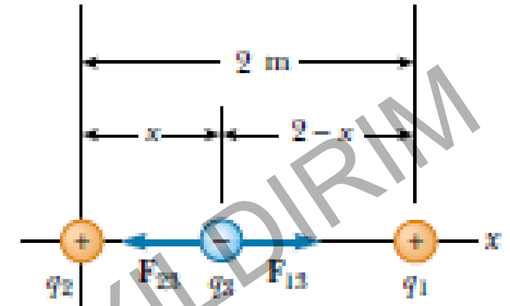
$$F_{13} = k\frac{|q_1||q_3|}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} = 9\times10^9\frac{\left(5\times10^{-6}\right)\left(5\times10^{-6}\right)}{2\left(0.1\right)^2} = 11\ \text{N}$$

$$F_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{a^2} = 9\times10^9\frac{\left(2\times10^{-6}\right)\left(5\times10^{-6}\right)}{\left(0.1\right)^2} = 9\ \text{N}$$

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = (11\cos 45 - 9)\hat{i} + (11\sin 45)\hat{j} = -1.1\hat{i} + 7.9\hat{j}\ \text{N}$$

$$Fnet = \sqrt{(-1.1)^2 + (7.9)^2} = 8\ \text{N}\ ;\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{7.9}{-1.1}\right) = 98^o$$

**Örnek :** Şekildeki gibi üç nokta yük, $x$-ekseni üzerine yerleştirilmiştir. $q_1 = 15\ \mu$C'luk yük $x = 2$ m noktasında, $q_2 = 6\ \mu$C'luk yük ise orijinde bulunmaktadır. $q_3$ nokta yükü $x$-eksini üzerinde hangi noktada olmalıdırki, üzerine etkiyen net kuvvet sıfır olsun?




$q_1$ ve $q_2$ yükleri aynı işaretli olduğu için, işareti ne olursa olsun $q_3$ yükü bunların arasına konulmalıdır. Bu durumda:

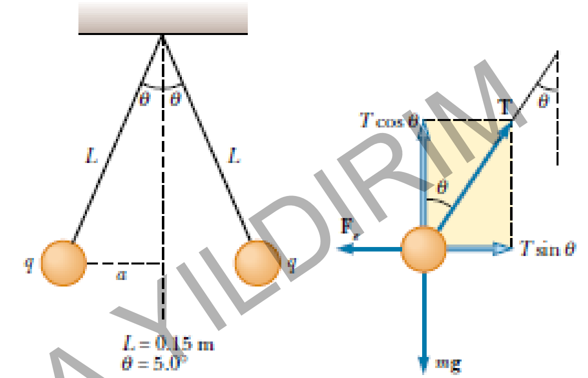
$$F_{13} = k\frac{|q_1||q_3|}{(2-x)^2} \quad ; \quad F_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{x^2}$$

$$F_{13} = F_{23} \quad \rightarrow \quad \frac{|q_1|}{(2-x)^2} = \frac{|q_2|}{x^2} \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$x = 0.775 \text{ m}$$

bulunur.

**Örnek :** Aynı noktadan asılmış, kütleleri $3\times10^{-2}$ kg olan yüklü iki özdeş küre şekildeki gibi dengededirler. İplerin boyu 15 cm ve $\theta = 5^{o}$ olduğuna göre, kürelerin yükü nedir?




Denge durumunda yükler arasındaki uzaklık: $a = L\sin\theta$ olacaktır. Küreler dengede olduğuna göre:

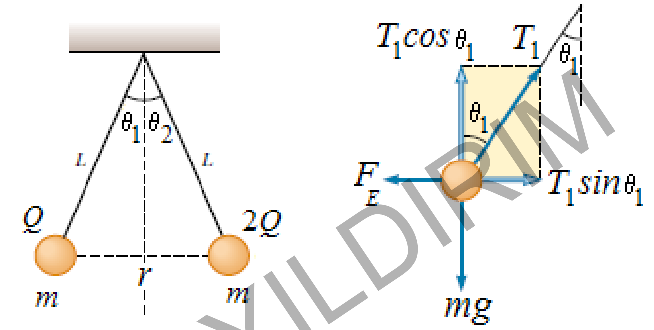
$$T\sin\theta = k\frac{q^2}{(2a)^2} \quad ; \quad T\cos\theta = mg$$

$$\tan\theta = \frac{k\dfrac{q^2}{(2a)^2}}{mg} \rightarrow q^2 = \frac{mg\tan\theta(2a)^2}{k} = 19.54\times10^{-16}$$

$$\text{q} = 4.42\times10^{-8}\ \text{C}$$

bulunur.

**Örnek :** Kütleleri $m$, yükleri de $q_1 = Q$ ve $q_2 = 2Q$ olan iki parçacık $L$ uzunluğundaki iplerle aynı noktadan düşey olarak asılı halde dengededirler. Yükleri asılı oldukları noktaya bağlayan iplerin düşeyle yaptıkları $\theta_1$ ve $\theta_2$ açıları çok küçüktür. Bu iki açı arasındaki ilişkiyi ve yükler arasındaki mesafeyi bulunuz.




$q_1$ yükü için $\left.\begin{array}{l} T_1 \sin\theta_1 = F_E \\ T_1 \cos\theta_1 = mg \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ $\tan\theta_1 = \dfrac{F_E}{mg}$

$q_2$ yükü için $\left.\begin{array}{l} T_2 \sin\theta_2 = F_E \\ T_2 \cos\theta_2 = mg \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ $\tan\theta_2 = \dfrac{F_E}{mg}$

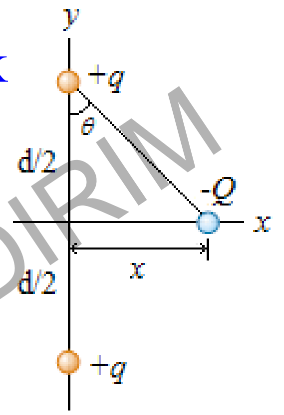
$\rightarrow \quad \theta_1 = \theta_2$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = L\sin\theta_1 \\ r_2 = L\sin\theta_2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad r = 2L\sin\theta_1 \cong 2L\tan\theta_1 \quad \rightarrow \quad \tan\theta_1 = \frac{r}{2L}$$

$$F_E = mg\tan\theta_1 \quad \rightarrow \quad k\frac{2Q^2}{r^2} = mg\frac{r}{2L} \quad \rightarrow \quad r = \left(\frac{4kQ^2L}{mg}\right)^{1/3}$$

bulunur.

**Örnek :** Yükleri $+q$ olan iki özdeş parçacık, aralarındaki mesafe $d$ olacak şekilde $y$-ekseni üzerinde sabitlenmişlerdir. Yükü $-Q$ ve kütlesi $m$ olan üçüncü bir parçacık ise, iki yükün ortasından dik olarak geçen eksen üzerinde, merkezden $x$ kadar uzaktaki bir noktaya konuyor. $-Q$ yükü bu eksen üzerinde rahatça hareket edebilmektedir. $x \ll d$ durumunda, $-Q$ yükünün basit harmonik hareket yapacağını gösteriniz. Hareketin periyodunu bulunuz.





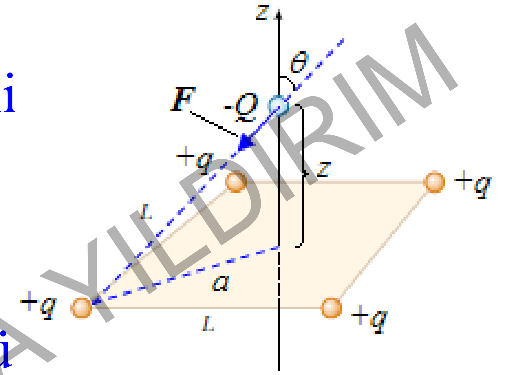

Basit harmonik hareket yapan bir cisim için, $F = -Cx$ olmalıdır ($\omega = \sqrt{C}$).

$-Q$ yüküne etkiyen geri çağırıcı kuvvet: $F = -2k\dfrac{qQ}{x^2 + (d/2)^2}\sin\theta = -\dfrac{2kqQx}{\left[x^2 + (d/2)^2\right]^{3/2}}$

$$x \ll d \rightarrow F = -\frac{2kqQx}{(d/2)^3\left[1 + (2x/d)^2\right]^{3/2}} = -\left(\frac{16kqQ}{d^3}\right)x$$

$$\omega = 2\pi / T \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{16kqQ}}$$

**Örnek :** Yükleri $+q$ olan dört özdeş parçacık, $xy$-düzleminde bulunan, kenar uzunluğu $L$ olan bir karenin köşelerine şekildeki gibi sabitlenmişlerdir. $-Q$ yüküne sahip başka bir parçacık ise, karenin merkezinden dik olarak geçen $z$-ekseni üzerinde, kare merkezinden $z$ kadar uzaktaki bir noktaya konuluyor. $-Q$ yükü üzerine etkiyen net kuvveti bulunuz.




$+q$ yüklerinden birisinin $-Q$ yüküne uyguladığı çekici kuvvet: $F = k\dfrac{qQ}{z^2 + a^2}$

$$a^2 = (L/2)^2 + (L/2)^2 = L^2/2$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$F_{net} = 4F\cos\theta \rightarrow \vec{F}_{net} = -\frac{4kqQz}{\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}}\hat{\mathrm{k}}$$

bulunur.

# BÖLÜM-22
# Elektrik Alanlar

Bu bölümde durgun yüklerin oluşturduğu elektrik alan ($\vec{E}$) kavramıyla tanışacağız. Yüklerin durgun olması halinde, yükler arasındaki etkileşmeleri belirlemek için Coulomb yasası yeterlidir. Yükler durgun olmasaydı, bu etkileşmeleri belirlemek için başka alternatif yollar bulmak gerekirdi. Bu konu kapsamında şu konulara değinilecektir:

- **Nokta yükün oluşturduğu elektrik alanın bulunması**
- **Nokta yük gruplarının ve sürekli yük dağılımlarının oluşturduğu elektrik alanların bulunması**
- **Elektrik alan içindeki yüke etkiyen kuvvetin bulunması**
- **"elektrik dipol" kavramını öğrenmek. Düzgün elektrik alan içindeki dipole etkiyen kuvveti, bu kuvvetin oluşturduğu torku ve dipolün potansiyel enerjisini belirlemek.**

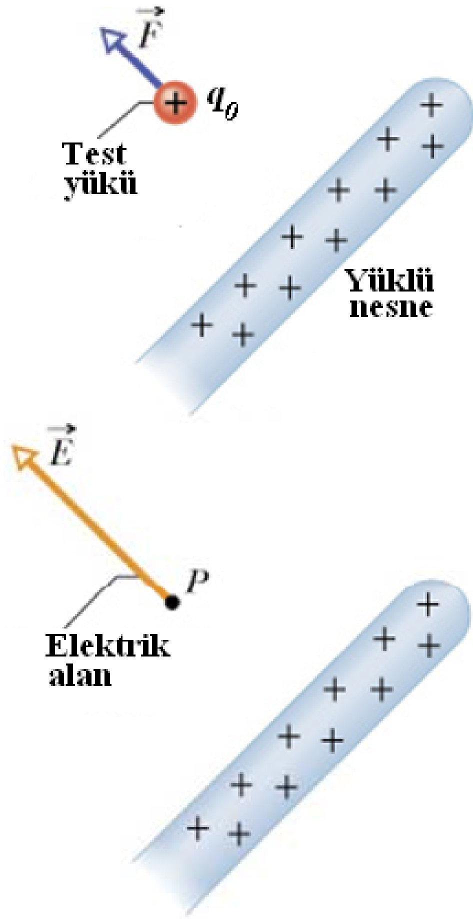
Aralarında $r$ mesafesi olan $q_1$ ve $q_2$ nokta yükleri arasındaki etkileşme kuvveti Coulomb yasasına göre,




$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

bağıntısına sahiptir. Nokta yükler arasında herhangi bir temas olmadığı halde, yüklerin birbirlerine kuvvet uygulamalarını nasıl açıklayabiliriz? $q_1$ yükü, yakınlarında $q_2$ yükünün bulunduğunu nerden biliyor? Bu nokta ancak, yeni bir kavram olan "**elektrik alan**" vektörü ile aydınlatılabilir. $q_1$ nokta yükü $q_2$ üzerine doğrudan kuvvet uygulamaz. Bunun yerine, $q_2$' nin bulunduğu noktada bir elektrik alan oluşturur ve kuvveti bu alan uygular.

**$q_1$ yükü $\rightarrow$ Elektrik Alan ($\vec{E}$) $\rightarrow$ $\vec{E}, q_2$ üzerine $\vec{F}$ kuvveti uygular**




# Elektrik Alan Vektörünün Tanımı :

Yandaki pozitif yüklü çubuğu ele alalım. Çubuğu çevreleyen uzaydaki tüm *P* noktalarında elektrik alan vektörü ($\vec{E}$) şöyle bulunur:

**1.** *P* noktasına **pozitif** bir $q_0$ test yükü konur.

**2.** Yüklü çubuğun $q_0$ test yüküne uyguladığı $\vec{F}$ kuvveti ölçülür.

**3.** *P* noktasındaki elektrik alan vektörü:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \text{(N/C)}$$

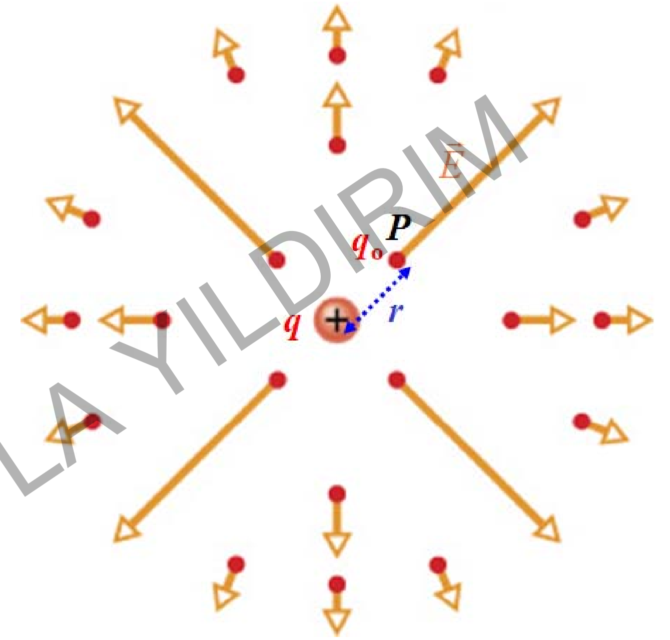
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

Görüldüğü gibi $\vec{E}$ ile $\vec{F}$ aynı yöndedir.

**Not :** $q_0$ test yükü, çubuktaki yük dağılımını değiştirmeyecek kadar küçüktür.

# Nokta Yükün Elektrik Alan :

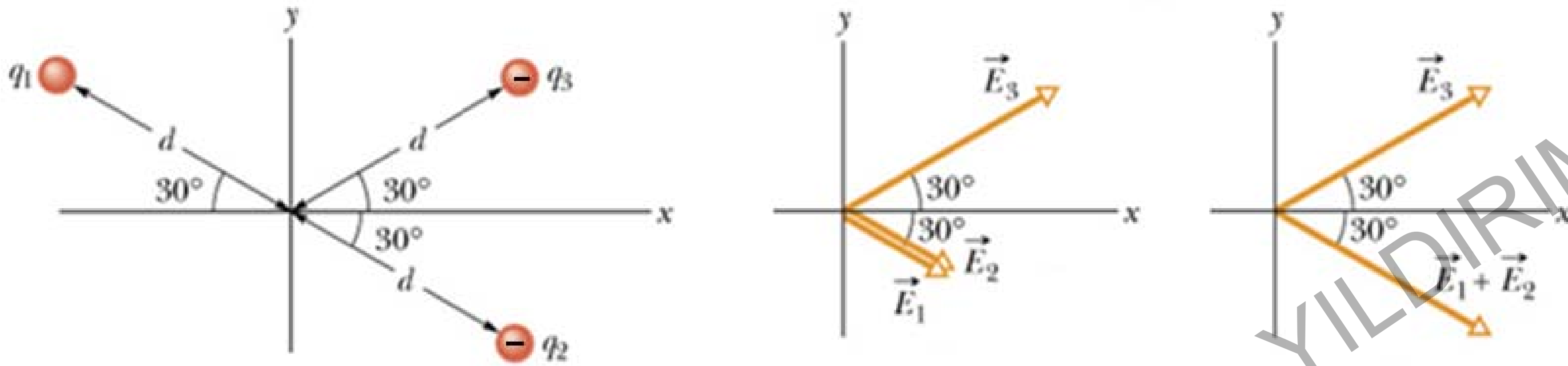
Şekildeki $q$ pozitif yükünü ele alalım. Yükten $r$ kadar uzaktaki $q_0$ test yüküne etkiyen kuvvet ve $q_0$' ın bulunduğu noktadaki elektrik alan:




$$F = k\frac{|q||q_0|}{r^2}$$

$$E = \frac{F}{q_0} = k\frac{|q||q_0|}{q_0 r^2} = k\frac{|q|}{r^2}$$

ile verilir. $\vec{E}$, $q$ yükünden dışarı doğrudur. $q$ nokta yükü negatif olsaydı $\vec{E}$, $q$ yüke doğru olurdu.




## Nokta Yük Grubunun Oluşturduğu Elektrik Alan :

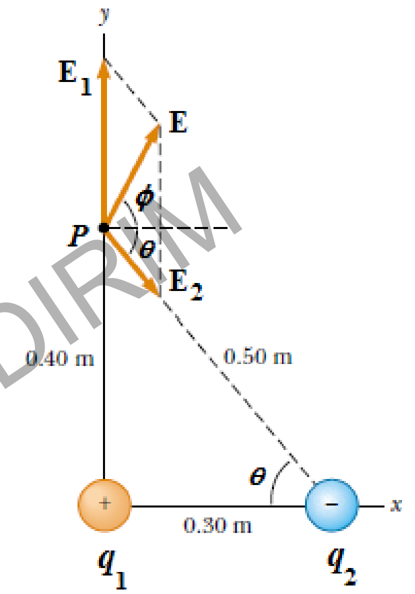
Bir nokta yük grubunun oluşturduğu net elektrik alan $\vec{E}$, herbir yükün oluşturduğu elektrik alanların vektörel toplamına eşittir.

Yukarıda verilen nokta yük grubunun orijinde oluşturduğu elektrik alan,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

olur. Burada $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ ve $\vec{E}_3$ sırasıyla, $q_1, q_2$ ve $q_3$ yüklerinin orijinde oluşturdukları elektrik alan vektörleridir.

**Örnek :** Şekilde gösterildiği gibi, $q_1 = 7.0\ \mu C$' luk bir yük orijinde ve $q_2 = -5.0\ \mu C$' luk diğer bir yük ise $x = 0.3$ m noktasındadır. Koordinatları (0;0.4) olan $P$ noktasındaki elektrik alanını bulunuz.




$q_1$ ve $q_2$ yüklerinin $P$ noktasında oluşturdukları elektrik alanların büyüklükleri, sırasıyla,

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{r_{1P}^2} = 3.9\times10^5\ \text{N/C}\ ;\ E_2 = k\frac{|q_2|}{r_{2P}^2} = 1.8\times10^5\ \text{N/C}$$

değerlerine sahiptir. Buradan da $P$ noktasındaki net elektrik alan,

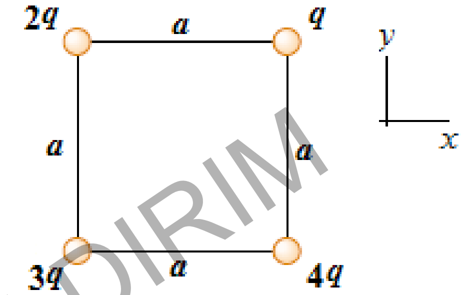
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(1.8\times10^5\cos\theta\right)\hat{\text{i}} + \left(3.9\times10^5 - 1.8\times10^5\sin\theta\right)\hat{\text{j}}$$

$$\vec{E} = 1.08\times10^5\,\hat{\text{i}} + 2.46\times10^5\,\hat{\text{j}}\ \ \text{N/C}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta = 0.8\\ \cos\theta = 0.6\end{array}\right\} \rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2.46\times10^5}{1.08\times10^5}\right) = 66.3^\circ$$

bulunur.

**Örnek :** Dört adet nokta yük, şekilde gösterildiği gibi, kenar uzunluğu $a$ olan bir karenin köşelerine konmuştur. Sağ üst köşedeki $q$ yükünün bulunduğu noktada, diğer yükler tarafından oluşturulan elektrik alanını ve $q$ yüküne etki eden kuvveti bulunuz.




$2q$, $3q$ ve $3q$ yüklerinin, $q$ yükünün bulunduğu noktada oluşturdukları elektrik alanların büyüklükleri, sırasıyla,

$$E_{2q} = k\frac{2q}{a^2} \;;\; E_{3q} = k\frac{3q}{2a^2} \;;\; E_{4q} = k\frac{4q}{a^2}$$

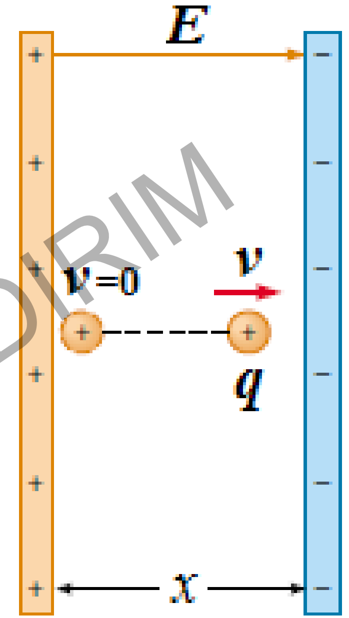
ifadelerine sahiptir. İlgi duyulan noktadaki net elektrik alan :

$$\vec{E} = \vec{E}_{2q} + \vec{E}_{3q} + \vec{E}_{4q} = \frac{kq}{a^2}\left(2 + \frac{3}{2}\cos 45\right)\hat{\imath} + \frac{kq}{a^2}\left(4 + \frac{3}{2}\cos 45\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{E} = \frac{kq}{a^2}\left(3.06\hat{\imath} + 5.06\hat{\jmath}\right) \;;\; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{5.06\times10^5}{3.06\times10^5}\right) = 58.8^{\circ}$$

bulunur.

**Örnek :** Yükü $q$ ve kütlesi $m$ olan bir parçacık, şekilde gösterildiği gibi, $+x$-ekseni yönünde yönelmiş düzgün bir $\vec{E}$ elektrik alanı içinde ilk hızsız serbest bırakılıyor. Cismin hareketini tanımlayınız. (Yer-çekimi kuvvetini ihmal ediniz).




$$ma_x = qE \quad \rightarrow \quad a_x = \frac{qE}{m}$$

$x_i = 0$ ve $v_i = 0$ olduğundan,

$$x_s = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{qE}{2m}t^2 \quad ; \quad v_s = a_x t = \frac{qE}{m}t$$

$$\text{W} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x} = \Delta K \quad \rightarrow \quad K_s = qEx$$

bulunur.

**Örnek :** Bir proton, elektrik alanının $\vec{E} = -6\times10^5\hat{i}$ olduğu bir bölgeye $+x$ - ekseni yönünde fırlatılıyor. Proton duruncaya kadar elektrik alan içinde 7 cm yol alıyor. Protonun ivmesini, ilk hızını ve ne kadar sürede durduğunu bulunuz. (Yer-çekimi kuvvetini ihmal ediniz).

$$m\vec{a} = q\vec{E} \rightarrow$$

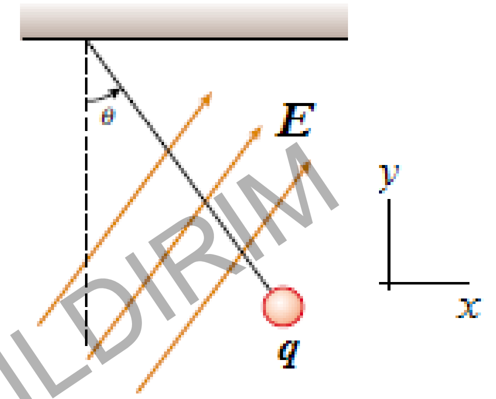
$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = \frac{1.6\times10^{-16}}{1.67\times10^{-27}}(-6\times10^5\hat{i}) = -5.75\times10^{16}\hat{i}\ \text{ m/s}^2$$

$$v_s^2 = v_i^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{x} \rightarrow 0 = v_i^2 - 2\left(5.75\times10^{16}\right)\left(0.07\right) \rightarrow v_i = 9\times10^7\ \text{ m/s}$$

$$v_s = v_i + a_x t \rightarrow t = \frac{v_i}{a_x} = \frac{9\times10^7}{5.75\times10^{16}} \cong 1.57\times10^{-9} = 1.57\text{ ns}$$

bulunur.

**Örnek :** Bir noktadan ağırlıksız iple asılmış $q$ yüküne ve $m$ kütlesine sahip küçük bir küre, şekilde gösterildiği gibi $\vec{E} = A\hat{\text{i}} + B\hat{\text{j}}$ (N/C) ile verilen düzgün bir elektrik alan içinde dengededir. $A$ ve $B$ pozitif sabitlerdir. Kürenin yükünü ve ipte oluşan gerilmeyi bulunuz.



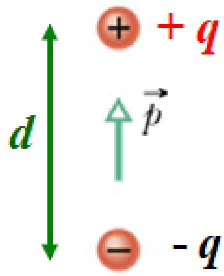

$$\sum \vec{F} = 0$$

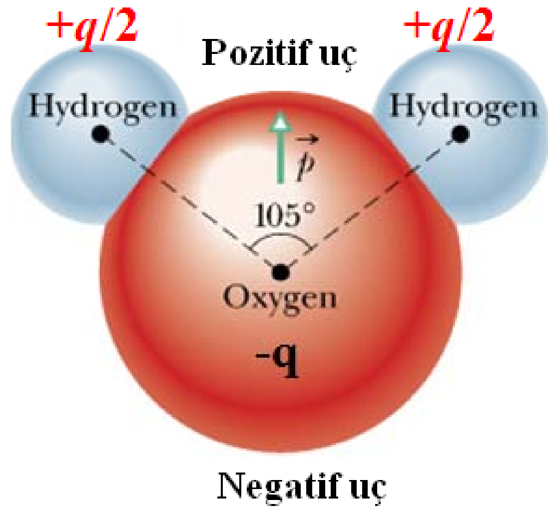
$$\left.\begin{aligned} T\sin\theta &= qE_x = qA \\ T\cos\theta + qB &= mg \end{aligned}\right\} \rightarrow \tan\theta = \frac{qA}{mg - qB} \rightarrow q = \frac{mg\tan\theta}{A + B\tan\theta}$$

$$T\sin\theta = qA \rightarrow$$

$$T = \frac{qA}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\theta}\frac{mg\tan\theta}{A + B\tan\theta} = \frac{mgA}{\cos\theta\left(A + B\tan\theta\right)}$$

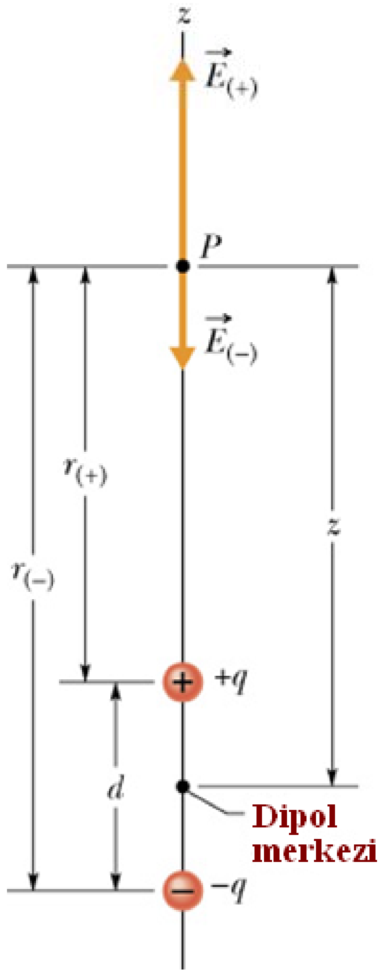
bulunur.




# Elektrik Dipol :

Aralarında $d$ uzaklığı olan, eşit ve zıt işaretli iki yükten $(\pm q)$ oluşan sisteme "elektrik dipol" denir. Her elektrik dipol, "elektrik dipol moment $(\vec{p})$" vektörü ile tanımlanır. Büyüklüğü $\boldsymbol{p = qd}$ ve yönü de $-q$ yükünden $q$ yüküne doğrudur. Su molekülü ($H_2O$) gibi birçok molekül kendiliğinden bir dipol momente sahiptir. Oksijen atomu ile iki hidrojen atomu arasındaki bağ, 10 değerlik elektron paylaşımı ile sağlanır (8 tane O' dan, 1' er tane de H' den). Bu 10 değerlik elektronu O atomuna yakın olma eğilimindedir. Bu nedenle su molekülünde, O' nun bulunduğu taraf H atomlarının bulunduğu tarafa göre daha negatiftir.




# Dipolün Oluşturduğu Elektrik Alan :

Dipolü oluşturan yüklerin P noktasında oluşturdukları elektrik alanların büyüklükleri:

$$E_{(+)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2} \quad \text{ve} \quad E_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-^2} \rightarrow E_{net} = E_{(+)} - E_{(-)}$$

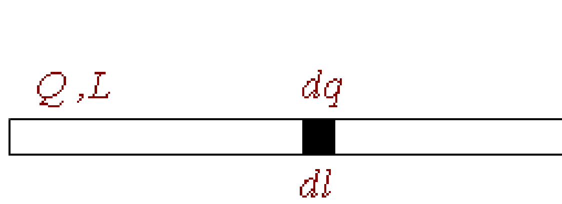
$$E_{net} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+^2} - \frac{q}{r_-^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(z-d/2)^2} - \frac{q}{(z+d/2)^2}\right)$$

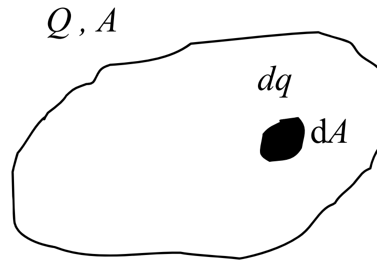
$$E_{net} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2z}\right)^{-2}\right]$$

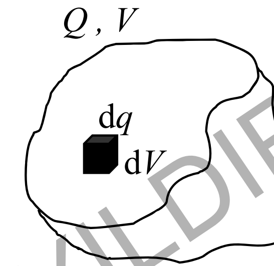
$\frac{d}{2z} \ll 1$ yaklaşımı yapılırsa $\left[(1+x)^{-2} \simeq 1-2x\right]$:

$$E_{net} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1+\frac{d}{z}\right) - \left(1-\frac{d}{z}\right)\right] = \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}$$

# Sürekli Yük Dağılımlarının Oluşturduğu Elektrik Alan:

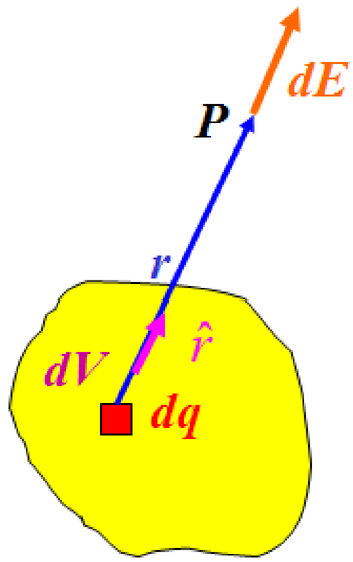



$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dl} \ \text{(C/m)} \qquad \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} \ (\text{C/m}^2) \qquad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{dq}{dV} \ (\text{C/m}^3)$$

- $Q$ yükü $L$ uzunluğunda bir çubuğa düzgün dağılmış ise, çizgisel yük dağılımı söz konusudur.
- $Q$ yükü $A$ yüzey alanına sahip bir plakaya düzgün dağılmış ise, yüzeysel yük dağılımı söz konusudur.
- $Q$ yükü $V$ hacmine sahip katı bir cisme düzgün dağılmış ise, hacimsel yük dağılımı söz konusudur.



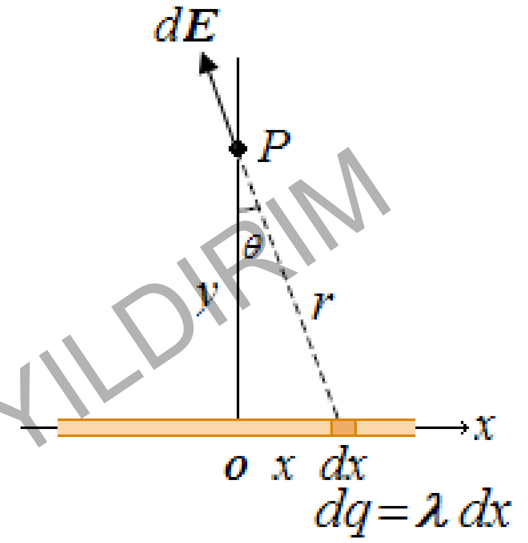

Yanda verilen hacimsel yük dağılımını gözönüne alalım. Bu yük dağılımının $P$ noktasında oluşturduğu elekrik alanı hesaplamak için izlenmesi gereken yol şöyle özetlenebilir:

**1.** Yük dağılımını, hacmi $dV$ olan sonsuz küçük elemanlara ayıralım. Her eleman $dq = \rho dV$ yüküne sahiptir ve $P$ noktası $dq$ yükünden $r$ kadar uzaktadır.

**2.** $dq$ yükünü nokta yük kabul ederek $P$ noktasında oluşturduğu $d\vec{E}$ elektrik alanını yaz ve yük dağılımı üzerinden integralini al (topla).

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dV}{r^2}\,\hat{r}$$

**Örnek :** Homojen yüklü sonsuz uzunluktaki bir çubuk şekildeki gibi $x$-ekseni üzerinde bulunmaktadır. Çubuk $\lambda$ çizgisel yük yoğunluğuna sahip ise, çubuktan $y$ kadar uzaktaki bir noktada elektrik alan ifadesini bulunuz.




$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dx}{\left(x^2+y^2\right)}$$

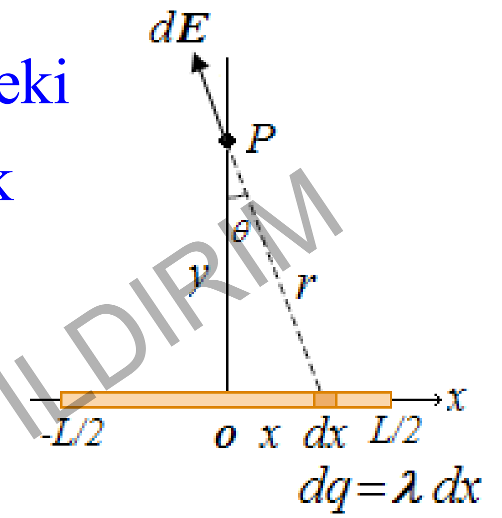
$$E = \int dE\cos\theta = k\lambda y\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2/y^2\right)^{3/2}}$$

$$\left.\begin{array}{c}\tan\theta = x/y \\ \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta = dx/y\end{array}\right\} \rightarrow E = \frac{k\lambda}{y}\int\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{y}\int\cos\theta d\theta$$

$$E = \frac{k\lambda}{y}\sin\theta = \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow E = \frac{2k\lambda}{y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

bulunur.

**Örnek :** Uzunluğu $L$ olan homojen yüklü bir çubuk şekildeki gibi $x$-ekseni üzerinde bulunmaktadır. Çubuk $\lambda$ çizgisel yük yoğunluğuna sahip ise, çubuğun orta noktasından $y$ kadar uzaktaki bir noktada elektrik alan ifadesini bulunuz.




$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dx}{\left(x^2+y^2\right)}$$

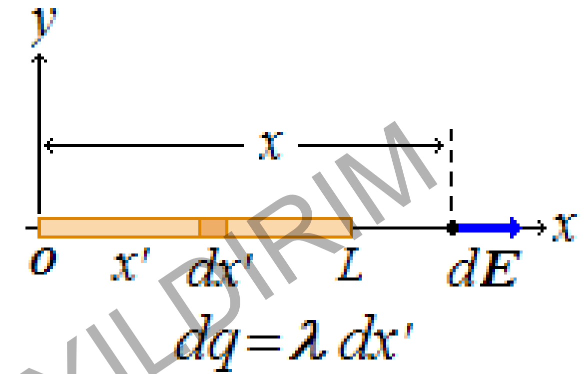
$$E = \int dE\cos\theta = k\lambda y\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{y^2}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dx}{\left(1+x^2/y^2\right)^{3/2}}$$

$$\left.\begin{array}{c}\tan\theta = x/y \\ \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta = dx/y\end{array}\right\} \rightarrow E = \frac{k\lambda}{y}\int\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{y}\int\cos\theta d\theta$$

$$E = \frac{k\lambda}{y}\sin\theta = \frac{k\lambda}{y}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-L/2}^{+L/2} \rightarrow E = \frac{k\lambda L}{y\sqrt{(L/2)^2+y^2}}$$

bulunur.

**Örnek :** Uzunluğu $L$ olan homojen yüklü bir çubuk şekildeki gibi $x$-ekseni üzerinde bulunmaktadır. Çubuk $\lambda$ çizgisel yük yoğunluğuna sahip ise, orijinden $x$ kadar uzaktaki ($x > L$) bir $P$ noktasında elektrik alan ifadesini bulunuz.




$$dE = k\frac{dq}{x^2} = k\frac{\lambda dx'}{(x-x')^2}$$

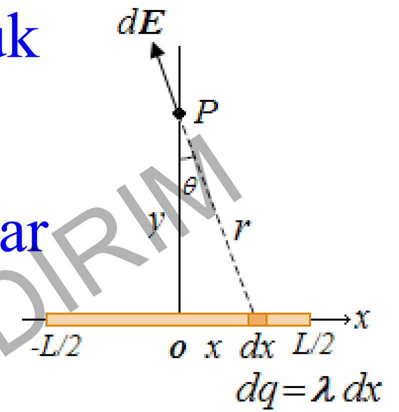
$$E = \int dE = k\lambda\int_0^L \frac{dx'}{(x-x')^2} \; ; \; \left.\begin{matrix} u = x - x' \\ du = -dx' \end{matrix}\right\} \rightarrow E = -k\lambda\frac{k\lambda}{y^2}\int\frac{du}{u^2}$$

$$E = k\lambda\frac{1}{u} = k\lambda\left[\frac{1}{x-x'}\right]_0^L = k\lambda\left[\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right]$$

$$E = \frac{k\lambda L}{x(x-L)}$$

bulunur.

**Örnek :** $x$-ekseni üzerinde bulunan, uzunluğu $L$ olan bir çubuk $\lambda = Ax$ çizgisel yük yoğunluğuna sahiptir. ($A$ pozitif bir, $x$ ise çubuğun ortasından olan uzaklıktır. Çubuğun ortasından $y$ kadar uzaktaki bir noktada elektrik alan ifadesi nedir?



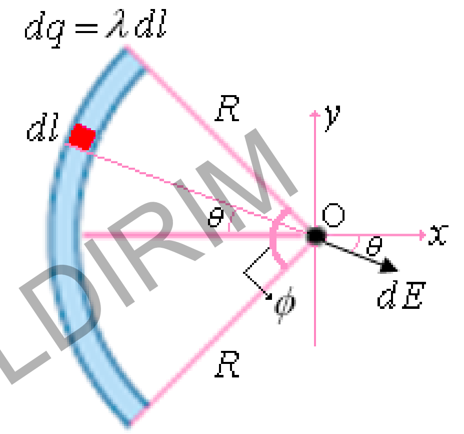

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dx}{\left(x^2+y^2\right)} = kA\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$E = \int dE\cos\theta = kAy\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = 2kAy\int_{0}^{L/2}\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$u = x^2+y^2 \rightarrow du = 2xdx \rightarrow E = kAy\int\frac{du}{u^{3/2}} = kAy\frac{u^{-1/2}}{(-1/2)}$$

$$E = -2kAy\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^{L/2} = 2kA\left[1-\frac{y}{\sqrt{(L/2)^2+y^2}}\right] \text{ bulunur.}$$

**Örnek :** Homojen yüklü ince bir çubuk, $R$ yarıçaplı çemberin bir parçası olacak şekilde bükülüyor. Şekilde verildiği gibi, yayı gören açı $\phi$' dir. Yayın çizgisel yük yoğunluğu $\lambda$ ise, çemberin merkezindeki (O noktası) elektrik alan nedir?



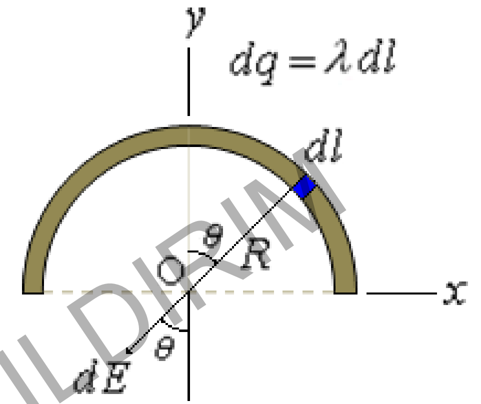

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dl}{R^2} = k\lambda\frac{Rd\theta}{R^2} = \frac{k\lambda}{R}d\theta$$

$$E = \int dE\cos\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\phi/2}^{\phi/2}\cos\theta d\theta = \frac{k\lambda}{R}\left[\sin\theta\right]_{-\phi/2}^{\phi/2}$$

$$E = \frac{2k\lambda}{R}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \rightarrow \vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\hat{\imath} \text{ bulunur.}$$

$$\phi = \pi \rightarrow \vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{\imath} \quad \text{ve} \quad \phi = 2\pi \rightarrow \vec{E} = 0$$

**Örnek :** Yüklü ince bir çubuk bükülerek, şekildeki gibi yarıçapı $R$ olan yarım çember haline getiriliyor. Çubuk üzerindeki bir noktadaki yük yoğunluğu, o noktanın konum vektörü ile düşey arasındaki açıya $\lambda = A\cos\theta$ ifadesi ile bağlıdır. Yarım çemberin merkezindeki (O noktası) elektrik alan nedir?

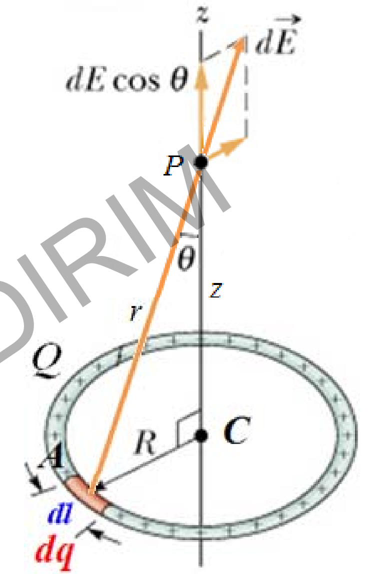



$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dl}{R^2} = kA\frac{\cos\theta R d\theta}{R^2} = \frac{kA}{R}\cos\theta d\theta$$

$$E = \int 2dE\cos\theta = \frac{2kA}{R}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta = \frac{2kA}{R}\int_0^{\pi/2}\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}d\theta$$

$$E = \frac{kA}{R}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)_0^{\pi/2} \rightarrow \vec{E} = -\frac{\pi kA}{2R}\hat{j} = -\frac{A}{8\varepsilon_0 R}\hat{j} \text{ bulunur.}$$

**Örnek :** $Q$ yükü $R$ yarıçaplı bir çember üzerine düzgün olarak dağılmıştır. Çemberin merkezinden dik olarak geçen $z$-ekseni üzerinde ve merkezden $z$ kadar uzaktaki $P$ noktasında elektrik alanı ($\vec{E}$) bulunuz. Hangi z değerinde elektrik alan maksimum olur?



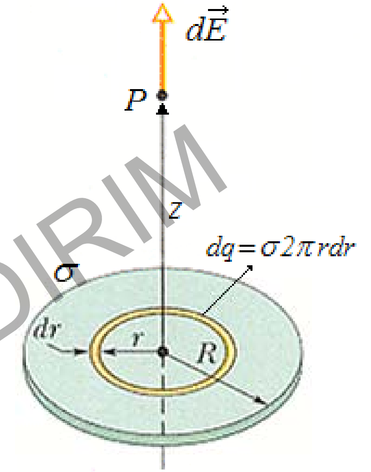

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{dq}{\left(z^2+R^2\right)} \quad ; dE_{yatay} = dE\sin\theta = 0 \text{ ve } dE_z = dE\cos\theta$$

$$dE_z = k\frac{zdq}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} \rightarrow E_z = \int dE_z = k\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^Q dq = k\frac{zQ}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \left[k\frac{zQ}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\right]\hat{\text{k}} ; \quad \text{z} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0 \text{ ve } \text{z} \gg \text{R} \rightarrow \vec{E} = \left[k\frac{Q}{z^2}\right]\hat{\text{k}}$$

$$\frac{dE}{dz} = 0 \rightarrow kQ\left[\frac{\left(z^2+R^2\right)-3z^2}{\left(z^2+R^2\right)^{5/2}}\right] = 0 \rightarrow z = \frac{R}{\sqrt{2}} \rightarrow E_{\max} = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_0\sqrt{3}R^2}$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ olan ince bir disk düzgün $\sigma$ yüzey yük yoğunluğuna sahiptir. Diskin merkezinden dik olarak geçen eksen üzerinde ve merkezden $z$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasında elektrik alanı ($\vec{E}$) bulunuz.



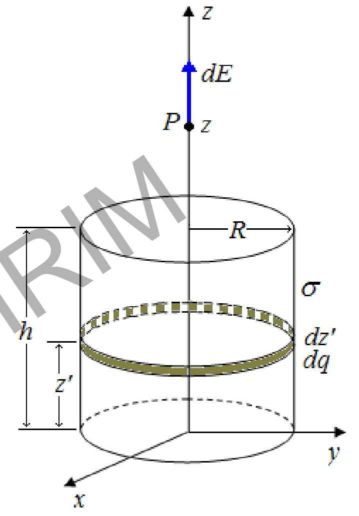

$$E = k\frac{zQ}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \rightarrow \quad dE = k\frac{zdq}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} = k\frac{z\sigma 2\pi r dr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

$$E = \int dE = kz\sigma 2\pi \int_0^R \frac{rdr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} \quad ; \quad \left.\begin{aligned} u &= z^2 + r^2 \\ du &= 2rdr \end{aligned}\right\} \rightarrow E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\frac{u^{-1/2}}{(-1/2)} = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right)_0^R \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]\hat{k}$$

$$z \ll R \rightarrow \vec{E} \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ ve yüksekliği $h$ olan ince silindirik bir kabuk, $xy$-düzlemine tabanı orijinde olacak şekilde yerleştirilmiştir. Silindir düzgün $\sigma$ yük yoğunluğuna sahip olduğuna göre, ekseni üzerindeki herhangi bir noktadaki ($P$) elektrik alanı bulunuz.




$$E = k\frac{zQ}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} \rightarrow \quad dE = k\frac{(z-z')\,dq}{\left((z-z')^2+R^2\right)^{3/2}} = k\frac{(z-z')\,\sigma\, 2\pi R\, dz'}{\left((z-z')^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$E = \int dE = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\int_0^h \frac{(z-z')\,dz'}{\left((z-z')^2+R^2\right)^{3/2}} \; ; \quad \left.\begin{aligned} u &= (z-z')^2+R^2 \\ du &= -2(z-z')\,dz' \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$E = -\frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\int \frac{du}{u^{3/2}} \rightarrow E = -\frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\frac{u^{-1/2}}{(-1/2)} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+R^2}}\right)_0^h$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(z-h)^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{\mathrm{k}} \quad ; \quad z = \frac{h}{2} \rightarrow \vec{E} = 0$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ ve $Q$ yükünün üzerine düzgün dağıldığı çembersel bir halkanın merkezine $-q$ yüküne sahip noktasal bir parçacık yerleştirilmiştir. $-q$ yükünü, çemberin merkezinden geçen dik eksen boyunca $z \ll R$ olacak şekilde çekip serbest bırakalım. $-q$ yükünün basit harmonik hareket yapacağını gösteriniz ve hareketinin periyodunu bulunuz.

$$E = k\frac{zQ}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} \rightarrow \vec{F} = q\vec{E} \rightarrow F = -kqQ\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

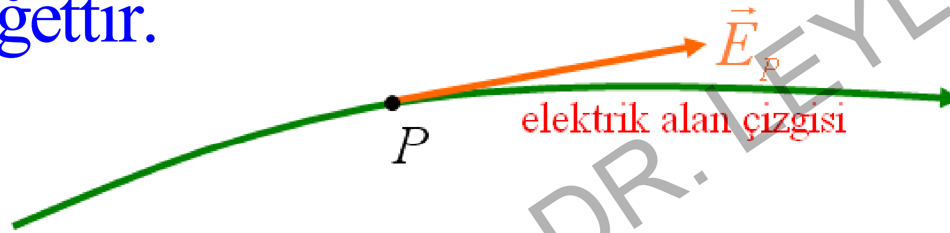
Basit harmonik haraket yapan bir cisim için: $F = -Cz$ olmalıdır.

$z \ll R \rightarrow F = -\frac{kqQ}{R^3}z \rightarrow$ cisim basit harmonik haraket yapıyor.

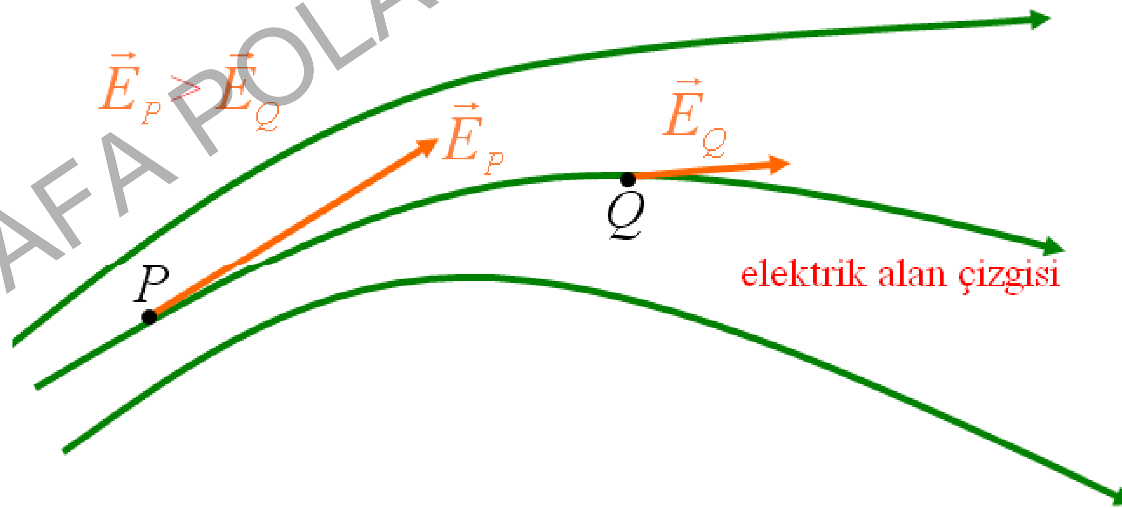
$$a = -\frac{kqQ}{mR^3}z \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{kqQ}{mR^3}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{kqQ}}$$

**Elektrik Alan Çizgileri :** İlk kez 19. yy' da Michael Faraday tarafından elektrik alan vektörünü resmetmek için ortaya konmuştur. Elektrik alan çizgileri ile elektrik alan vektörü arasında şu ilişkiler vardır :

1. Herhangi bir P noktasında, elektrik alan vektörü $\vec{E}$ elektrik alan çizgisine teğettir.




**2. Elektrik alan şiddeti, elektrik alan çizgilerinin yoğunluğu ile orantılıdır.**

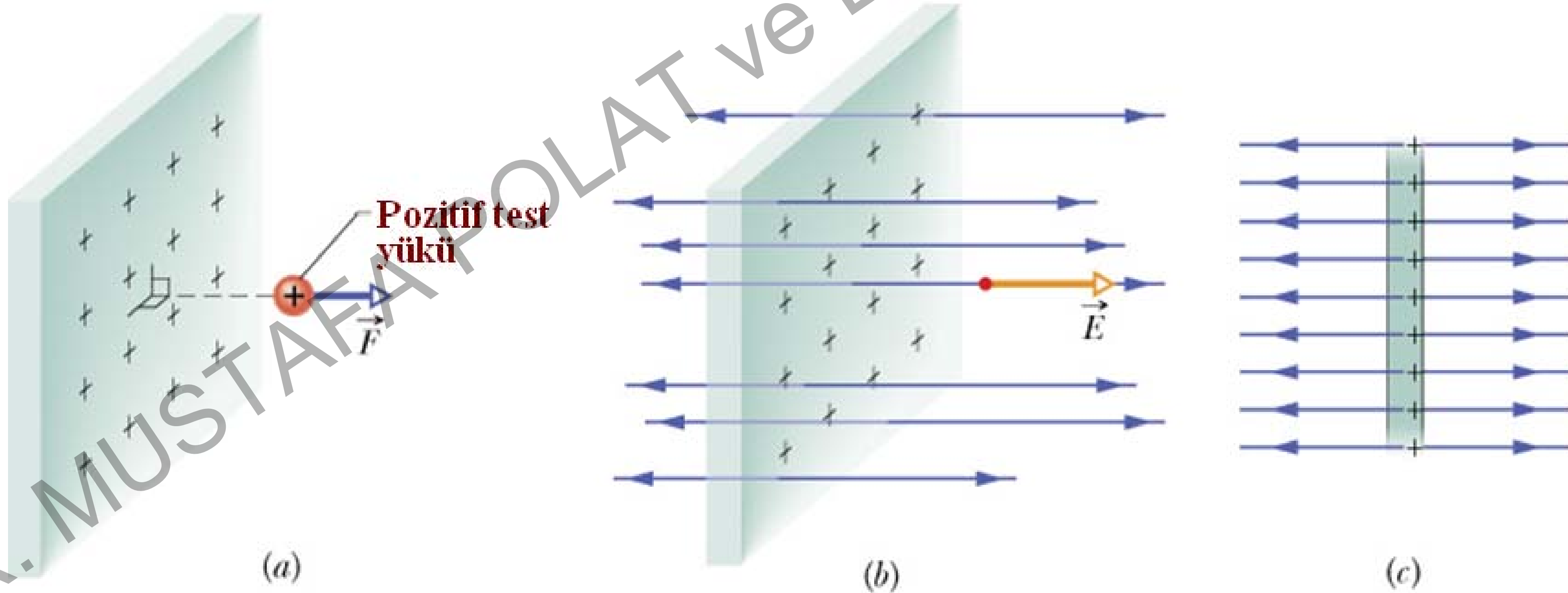


Örnek : Sonsuz geniş yüklü plakanın oluşturduğu elektrik alan çizgileri.

1. Plakanın her iki tarafında elektrik alan şiddeti sabittir.
2. Elektrik alan vektörü plakaya diktir.
3. Elektrik alan vektörünün yönü, plakadan dışarı doğrudur.

Not : Plaka negatif yüklü olsaydı, elektrik alan vektörünün yönü plakaya doğru olurdu.





3. Elektrik alan çizgileri pozitif yüklerden çıkarak negatif yüklerde sonlanırlar.

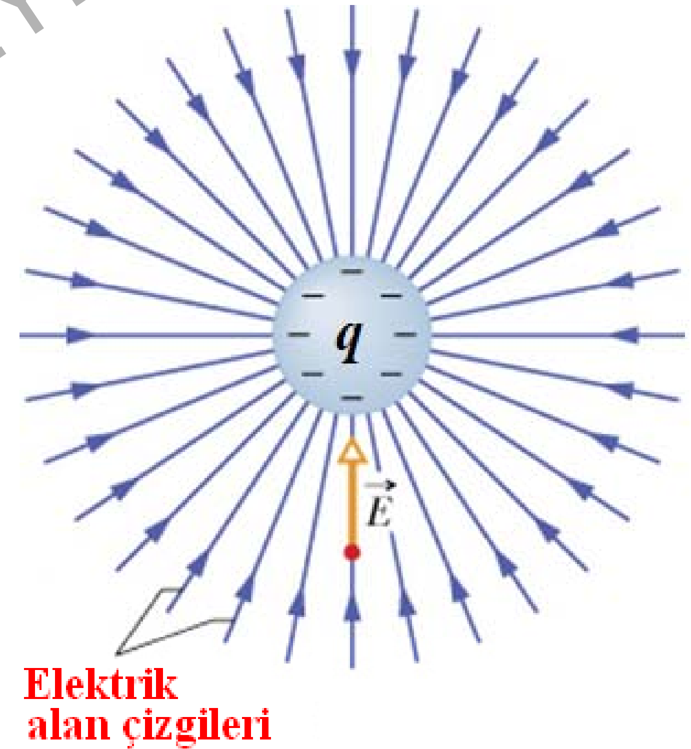
Örnek : $-q$ yükünün oluşturduğu elektrik alan çizgileri :

$$E = k\frac{|q|}{r^2}$$

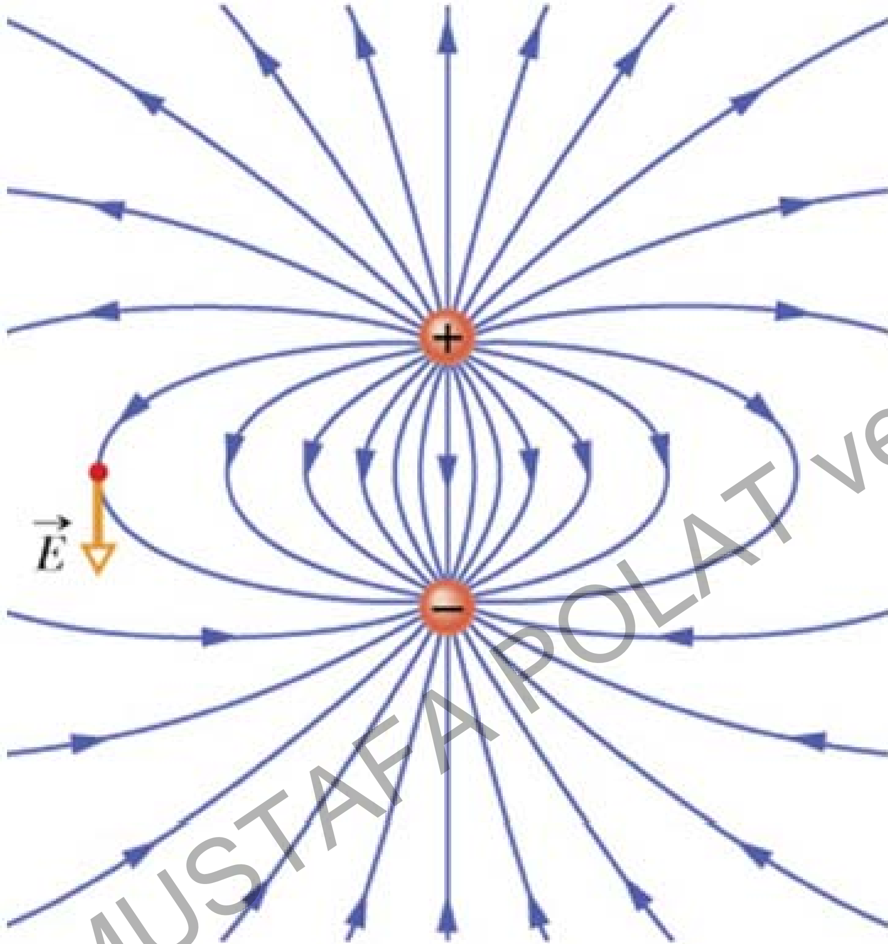
-Elektrik alan çizgileri yüke doğrudur.

-Elektrik alan çizgilerinin yönü, $\vec{E}$' nin yönünü verir.

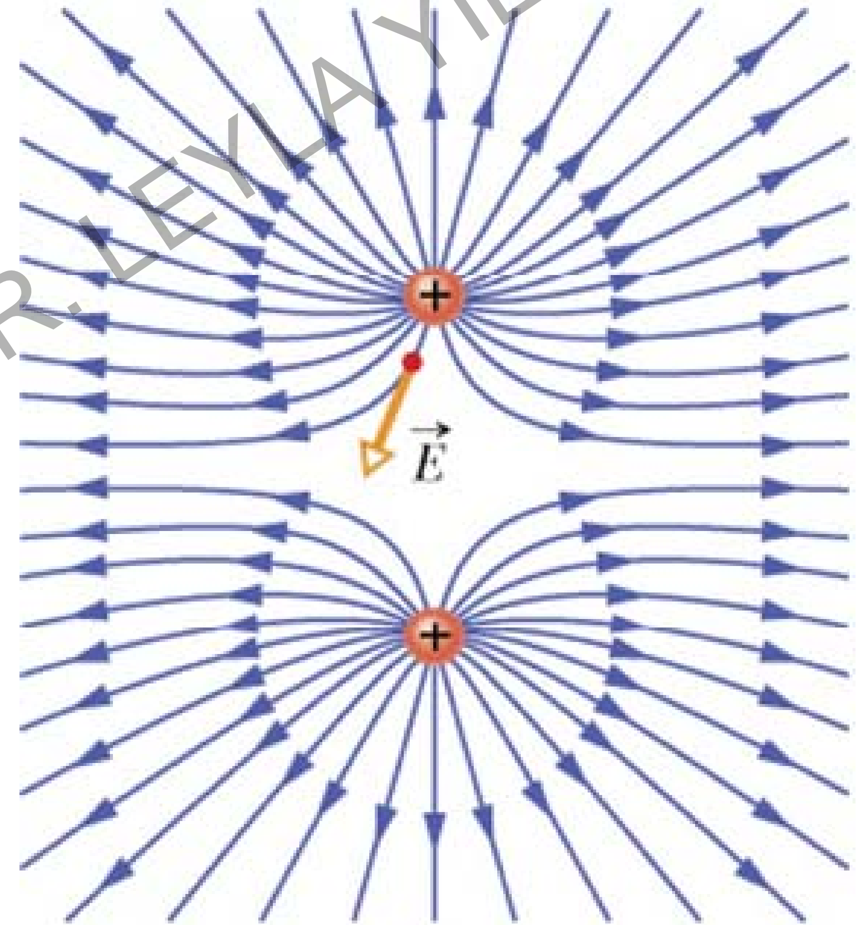
-Birim yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin younluğu, yüke yaklaştıkça artmaktadır.

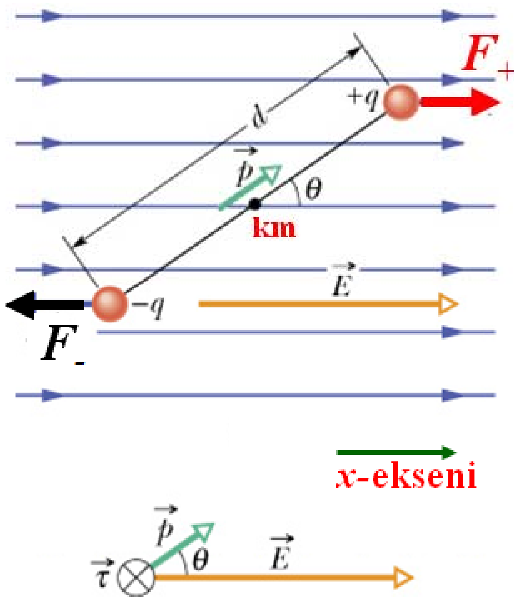


Bir elektrik dipolünün oluşturduğu elektrik alan çizgileri :




Özdeş iki pozitif yükün oluşturduğu elektrik alan çizgileri:






# Düzgün Elektrik Alan İçinde Elektrik Dipol :

Yanda $x$ - ekseni yönünde düzgün bir elektrik alan içinde bulunan elektrik dipolünü ele alalım. Pozitif ve negatif yüklere, sırasıyla, $F_+ = qE$ ve $F_- = -qE$ kuvvetleri etkir. Dipole etkiyen net kuvvet,

$\boldsymbol{F_{net} = qE - qE = 0}$ olacaktır.

Dipolün kütle merkezine göre $F_+$ ve $F_-$ kuvvetlerinin oluşturduğu net tork ise,

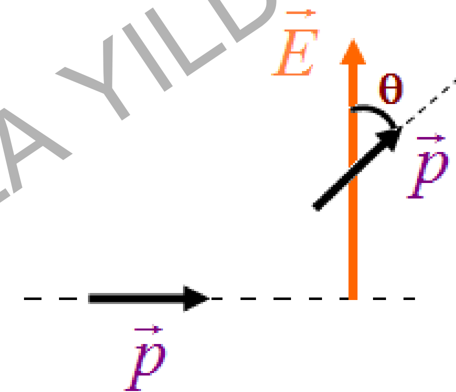
$$\tau = \tau_+ + \tau_- = \left|F_+\right|\frac{d}{2}\sin\theta + \left|F_-\right|\frac{d}{2}\sin\theta = qEd\sin\theta = pE\sin\theta$$

olur ve $\boldsymbol{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$ formunda yazılabilir. Bu da, düzgün elektrik alan içindeki dipolün ötelenemeyeceğini ancak, kütle merkezi etrafında döneceğini gösterir.

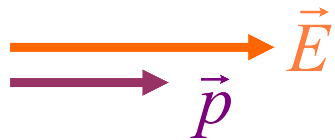
# Düzgün Elektrik Alandaki Elektrik Dipolünün Potansiyel Enerjisi :

$$U = -\int_{90°}^{\theta} \tau d\theta' = -\int_{90°}^{\theta} pE \sin\theta' d\theta' \quad (d\theta' \text{ azalma yönündedir})$$

$$U = -pE \int_{90°}^{\theta} \sin\theta d\theta' = -pE\cos\theta$$




$$\boldsymbol{U = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$




$\vec{p}$ ile $\vec{E}$ aynı yönde $(\theta = 0) \rightarrow U_{min} = -pE.$

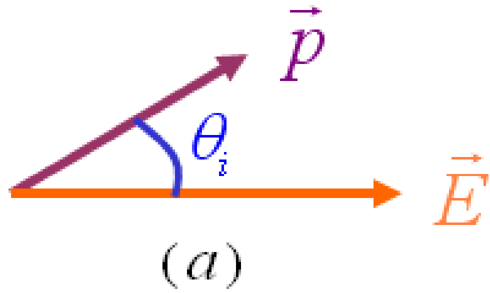
Sistem kararlı denge durumundadır.

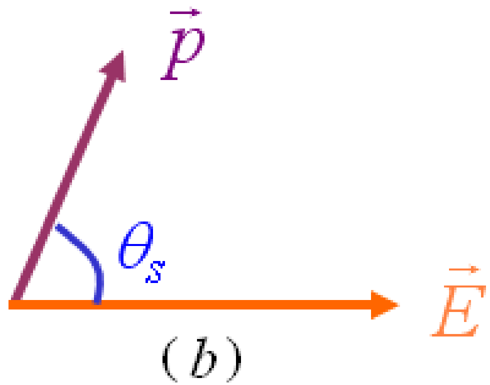



$\vec{p}$ ile $\vec{E}$ ters yönde $(\theta = 180°) \rightarrow U_{max} = +pE.$

Sistem kararsız denge durumundadır.

## Düzgün Elektrik Alan İçindeki Elektrik Dipolü Üzerinde Dış Kuvvetin Yaptığı İş :



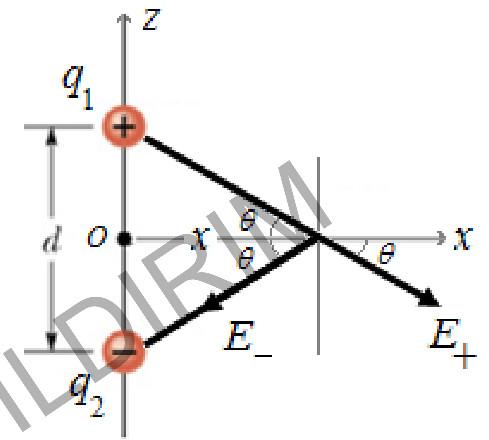




Düzgün bir $\vec{E}$ elektrik alanı içinde, alanla $\theta_i$ açısı yapan bir $\vec{p}$ elektrik dipolü olsun (Şekil-*a*). Bir dış kuvvetin yardımıyla dipolü Şekil-*b*' deki gibi $\vec{E}$ ile $\theta_s$ açısı yapacak şekilde çevirelim. Dış kuvvetin yaptığı iş, dipolün son durumdaki potansiyel enerjisi ile ilk durumdaki potansiyel enerjisi arasındaki fark kadardır:

$$W = U_s - U_i = -pE\cos\theta_s - \left(-pE\cos\theta_i\right)$$

$$W = pE\left(\cos\theta_i - \cos\theta_s\right)$$

**Örnek :** Yükleri $q_1 = 2.0\ \mu\text{C}$ ve $q_2 = -2.0\ \mu\text{C}$, aralarındaki mesafe $d = 5$ mm olan bir elektrik dipolü, merkezi orijinde olacak şekilde $z$-ekseni üzerinde konmuştur. $z$-eksenine dik ve dipolün merkezinden 1.5 m uzaktaki bir noktada elektrik alan nedir?



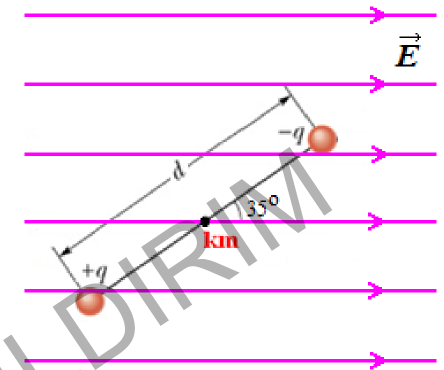

$$\vec{p} = (qd)\hat{\mathrm{k}} = 1\times10^{-8}\ \mathrm{C\cdot m}\ ;\ E_+ = k\frac{q}{(d/2)^2 + x^2}\ ;\ E_- = k\frac{q}{(d/2)^2 + x^2}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-\quad ;\quad \left.\begin{aligned} E_x &= E_+\cos\theta - E_-\cos\theta = 0 \\ E_y &= E_+\sin\theta + E_-\sin\theta = 2E_+\sin\theta \end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$\vec{E} = -E_y\hat{\mathrm{k}} = -k\frac{qd}{\left[(d/2)^2 + x^2\right]^{3/2}}\hat{\mathrm{k}} = -\frac{k}{\left[(d/2)^2 + x^2\right]^{3/2}}\vec{p}$$

$$\vec{E} = 26.7\hat{\mathrm{k}}\ \mathrm{N/m}$$

**Örnek :** Yükleri $q = \mp 1.6\times10^{-19}$ C ve aralarındaki mesafe $d = 0.125$ nm olan bir elektrik dipolü, büyüklüğü $5\times10^{5}$ N/C olan düzgün bir elektrik alan içine şekilde görüldüğü gibi yerleştirilmiştir. Dipol ve elektrik alan sayfa düzlemindedir. Elektrik dipol momentini, dipole etkiyen torku ve dipolün potansiyel enerjisini bulunuz. Dipol, elektrik alan tarafından kendisiyle aynı yönde oluncaya kadar döndürülür. Elektrik alanın yaptığı iş ne olur?




$$p = qd = \left(1.6\times10^{-19}\right)\cdot\left(0.125\times10^{-9}\right) = 2.0\times10^{-29}\ \text{C}\cdot\text{m}\ (-\text{ yükten } + \text{ yüke doğru})$$

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} \rightarrow \tau = pE\sin\theta = \left(2.0\times10^{-29}\right)\cdot\left(5\times10^{5}\right)\sin 145$$

$$\tau = 5.7\times10^{-24}\ \text{N}\cdot\text{m (sayfa düzleminden dışarı doğru)}$$

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} \rightarrow U = -pE\cos 145 = -\left(2.0\times10^{-29}\right)\cdot\left(5\times10^{5}\right)\cos 145$$

$$U = 8.2\times10^{-24}\ \text{J}$$

$$W = -\Delta U \rightarrow W = -pE(\cos 145 - \cos 0) = -\left(2.0\times10^{-29}\right)\cdot\left(5\times10^{5}\right)(-1.82)$$

$$W = 1.82\times10^{-23}\ \text{J}$$

# BÖLÜM-23
# Gauss Yasası

Bu bölüm kapsamında şu konulara değinilecektir:

- **Elektrik akısı (Φ)**
- **Simetri**
- **Gauss yasası**

Gauss yasasını uygulayarak;

- **Düzgün yüklü sonsuz geniş yalıtkan plakanın,**
- **Düzgün yüklü sonsuz uzun yalıtkan çubuğun,**
- **Düzgün yüklü küresel kabuğun ve kürenin**

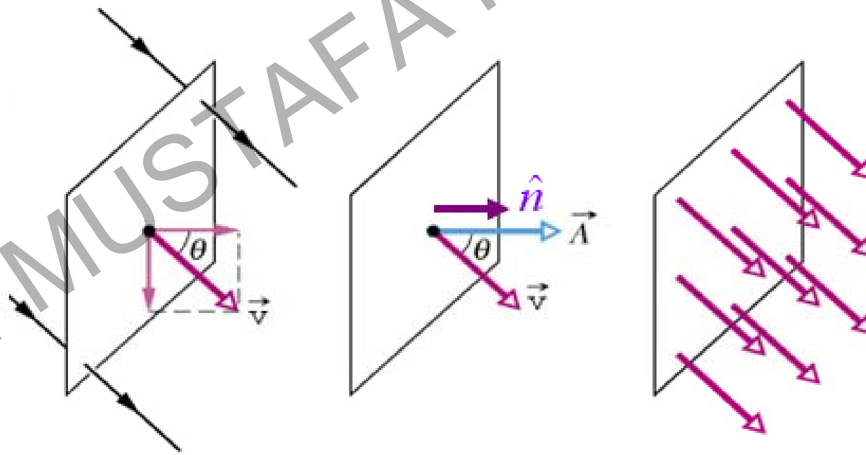
oluşturduğu elektrik alanları hesaplayacağız. Gauss yasasını kullanarak, iletkenlerin içinde ve dışındaki elektrik alanlar da hesaplanacaktır.

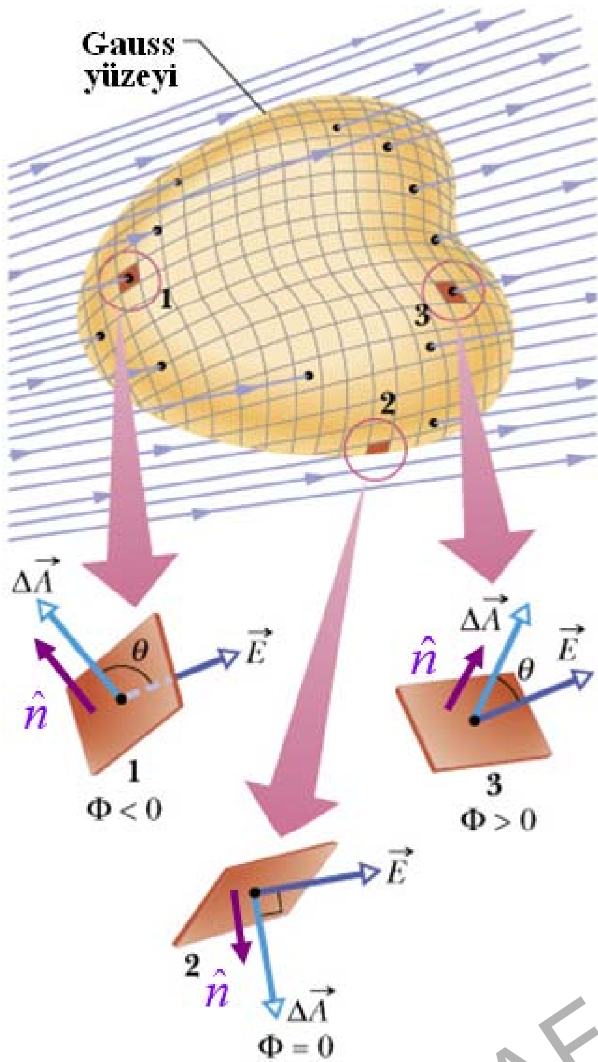
**Bir Vektörün Akısı :** Hızı $\vec{v}$ olan bir hava akımı, $A$ yüzey alanına sahip bir yüzeye doğru geliyor olsun ve hız vektörü $\vec{v}$ ile yüzeyin normali ($\hat{n}$) arasındaki açı da $\theta$ olsun. İlgili yüzeyden geçen **akı**, $\Phi = vA\cos\theta$ bağıntısı ile verilir ve bu örnekte "hacimsel akış hızı (debi)" anlamı taşır.

**Not-1:** Hava akımının hızı, geldiği yüzeyin normali ile aynı yöndeyse ($\vec{v}$, yüzeye dik) akı maksimumdur ($vA$). Hız yüzeyin normaline dik ise ($\vec{v}$, yüzeye paralel) akı sıfırdır.

**Not-2:** $\Phi = vA\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{A}$ biçiminde yazılabilir. Burada $\vec{A}$ vektörü, yüzeyin normali ile aynı yönde, büyüklüğü $A$ olan bir vektördür. İsmine "yüzey alan vektörü" diyebiliriz.








# Elektrik Alan Akısı :

Şekildeki gibi $\vec{E}$ elektrik alanı içinde kapalı bir yüzey düşünelim. Bu yüzeyden geçen $\Phi$ elektrik akısı şöyle tanımlanır:

1. Yüzeyi, $\Delta A$ alanına sahip sonsuz küçük elemanlara ayıralım.

2. Her elemandan geçen akı $\vec{E}\cdot\Delta\vec{A} = E\Delta A\cos\theta$ olacaktır.

3. Toplam akı; $\Phi = \sum \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}$ olarak bulunur.

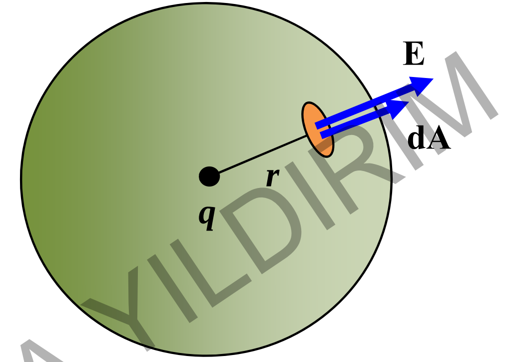
4. $\Delta A \rightarrow 0$ durumundaki limit, yüzeyden geçen akıya eşittir.

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} \quad (\mathrm{N\cdot m^2/C})$$

**Not-1 :** İntegral sembolü üzerindeki çember, integralin kapalı yüzey üzerinden alınacağını gösterir.

**Note 2 :** Elektrik akısı ($\Phi$), yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin sayısıyla orantılıdır.

**Örnek :** Yükü 1.0 $\mu$C olan noktasal bir parçacığın, merkezinde bulunduğu 1.0 m yarıçaplı küresel bir yüzeyden geçirdiği elektriksel akıyı hesaplayınız.




Pozitif bir $q$ noktasal yükünün kendisinden $r$ kadar uzakta oluşturduğu elektrik alan, kendisinden dışarı doğrudur ve büyüklüğü,

$$E = k\frac{q}{r^2}$$

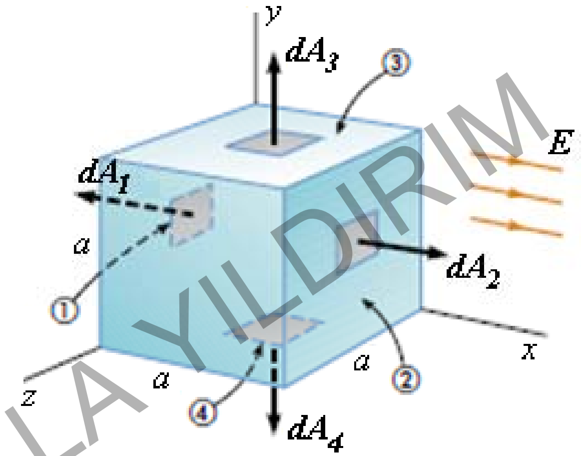
ile verilir. Bu durumda,

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA\cos 0 = k\frac{q}{r^2}dA$$

$$\Phi = \oint_S k\frac{q}{r^2}dA = k\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \Phi = \frac{1\times 10^{-6}}{8.85\times 10^{-12}} = 1.13\times 10^5 \ \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{C}$$

bulunur.

**Örnek :** Kenar uzunluğu $a$ olan bir küp, şekildeki gibi, pozitif $x$-ekseni yönünde düzgün bir $\vec{E}$ elektrik alanı içinde bulunmaktadır. Küpün yüzeylerinden geçen toplam elektrik akısı nedir?




Yüzey alan vektörleri y-ekseni (3 ve 4 nolu yüzeyler) ve z-ekseni doğrultusunda olan yüzeyler (ön ve arka yüzeyler), elektrik alan vektörüne diktir. Bu yüzeyler akıya katkı getirmezler. Toplam akı, 1 ve 2 nolu yüzeylerden katkılanır:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = Ea^2 \cos 180 + Ea^2 \cos 0$$

$$\Phi = Ea^2(-1+1) = 0$$

bulunur.

**Örnek :** Büyüklüğü 3.5 kN/C olan ve pozitif $x$-ekseni yönünde yönelmiş düzgün bir elektrik alan içine, uzunluğu 0.70 m ve genişliği 0.35 m olan dikdörtgen şeklinde bir plaka konuluyor. Aşağıdaki durumlar için plakadan geçen akıyı hesaplayınız.

$a$–) plaka $yz$ ve $xy$ düzlemlerinde bulunuyorsa

$b$–) plaka normali $x$-ekseni ile $40^{\circ}$ açı yapıyor ve $y$-ekseni plaka yüzeyinde bulunuyorsa

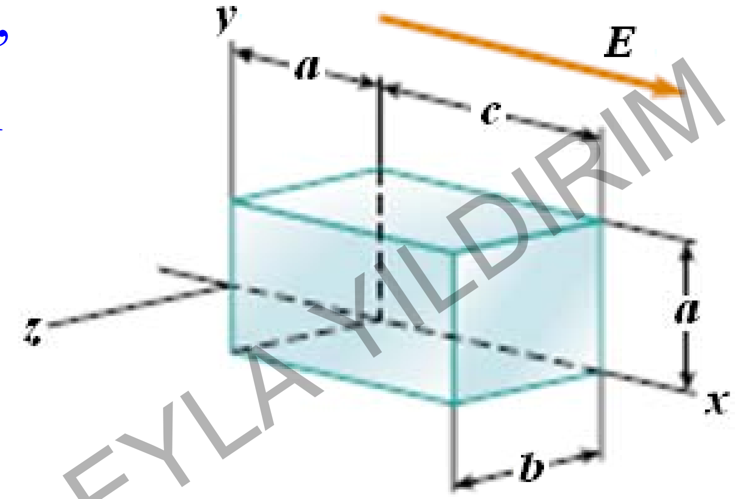
$$A = (0.35)*(0.7) = 245\times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

$$a–)\ \Phi_{yz} = \vec{E}\cdot\left(A\hat{\mathrm{i}}\right) = EA = \left(3.5\times 10^{3}\right)\cdot\left(245\times 10^{-3}\right) = 857.5\ \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{C}$$

$$\Phi_{xy} = \vec{E}\cdot\left(A\hat{\mathrm{k}}\right) = EA\left(\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{k}}\right) = 0$$

$$b–)\ \Phi = \vec{E}\cdot\left(A\cos 40\hat{\mathrm{i}} + A\sin 40\hat{\mathrm{k}}\right) = EA\cos 40 = 657\ \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{C}$$

**Örnek :** Kare prizma şeklindeki kapalı bir yüzey, şekildeki gibi, pozitif $x$-ekseni yönünde ve şiddeti $E=(3+2x^2)$ ifadesi ile değişen bir elektrik alanı içinde bulunmaktadır. $a=b=0.4$ m ve $c=0.6$ m olduğuna göre, kare prizmanın yüzeyinden geçen toplam elektrik akısı nedir?



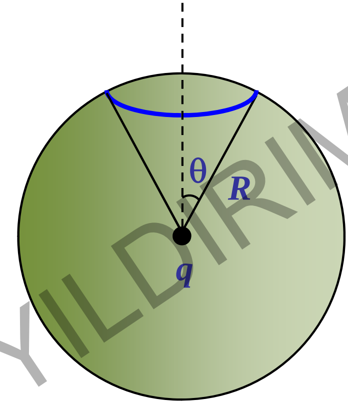

Yüzey alan vektörleri $y$-ekseni ve $z$-ekseni doğrultusunda olan yüzeyler (bir kenarı $c$ olan dikdörtgensel yüzeyler) elektrik alan vektörüne diktir. Bu yüzden akıya katkı getirmezler. Toplam akı, karesel yüzeylerden katkılanır:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{A}_2 = E\big|_{x=a}\, ab\cos 180 + E\big|_{x=a+c}\, ab\cos 0$$

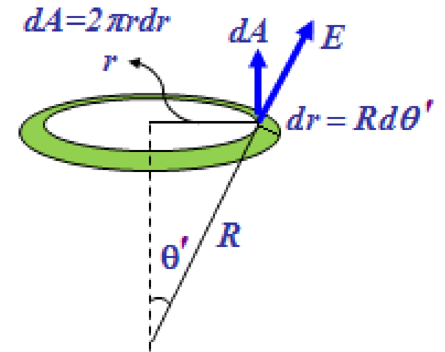
$$\Phi = ab\left[-(3+2a^2)+3+2(a+c)^2\right] = ab\left[2(a+c)^2-2a^2\right] = 0.27\ \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{C}$$

bulunur.

**Örnek :** Pozitif q yüklü bir parçacık, şekildeki gibi, R yarıçaplı bir küre kabuğunun merkezindedir. Şekilde gösterildiği gibi, yükün gördüğü $2\theta'$ lık bir katı açının gördüğü yüzeyden geçen akıyı bulunuz.




Küre yüzeyi üzerinde $r$ yarıçaplı $dr$ kalınlığında bir halkadan geçen akı,




$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA\cos\theta' = k\frac{q}{R^2}2\pi r dr$$

$$d\Phi = \frac{q}{2\varepsilon_0 R^2}\left(R\sin\theta'\right)\left(Rd\theta'\right) = \frac{q}{2\varepsilon_0}\sin\theta' d\theta'$$

$$\Phi = \int_0^{\theta}\frac{q}{2\varepsilon_0}\sin\theta' d\theta' = -\frac{q}{2\varepsilon_0}\left[\cos\theta'\right]_0^{\theta} = \frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta)$$

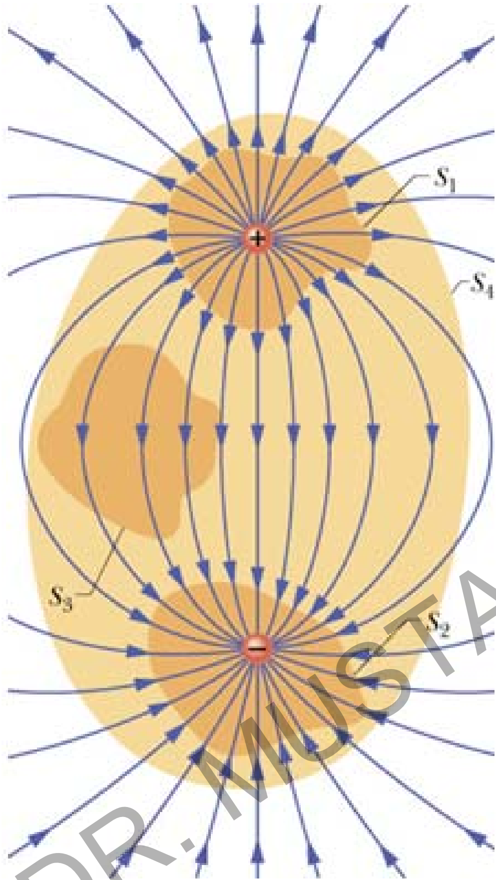
$$\theta = \pi/2 \rightarrow \Phi = \frac{q}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad \theta = \pi \rightarrow \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

# Gauss Yasası :

Gauss yasası şu şekilde formüle edilir :

(Herhangi bir yüzeyden geçen akı) $* \varepsilon_0 =$ (yüzeyin içindeki net yük)

$$\Phi\varepsilon_0 = q_{iç} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{iç}$$




Not - 1 : Gauss yasası her kapalı yüzey için geçerlidir.

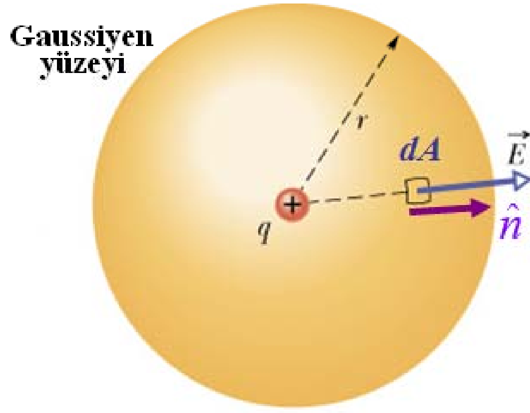
Not - 2 : Kapalı yüzey içindeki net yükü belirlerken, yüklerin işaretlerini dikkate almak gerekir.

Not - 3 : Gauss yasasını uygularken, akıya katkıları olmadığı için yüzeyin dışındaki yükler işleme katılmaz.

Yandaki şekil için;

$S_1$ yüzeyi : $\varepsilon_0 \Phi_1 = +q$, $\qquad$ $S_2$ yüzeyi : $\varepsilon_0 \Phi_2 = -q$

$S_3$ yüzeyi : $\varepsilon_0 \Phi_3 = 0$, $\qquad$ $S_4$ yüzeyi : $\varepsilon_0 \Phi_4 = -q + q = 0$




# Gauss Yasası ve Coulomb Yasası :

Gauss yasası ve Coulomb yasası, durgun elektrikte elektrik yükü ile elektrik alan arasındaki ilişkiyi farklı biçimlerde açıklayan bağıntılardır. Her ikisi de birbirinden türetilebilir. Örneğin, Coulomb yasasını Gauss yasasından türetelim:



$q$ nokta yükünden $r$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasındaki elektrik alan Gauss yasasından bulunabilir. $q$ yükünü merkez kabul eden $r$ yarıçaplı küresel bir Gaussiyen yüzey seçelim. Gaussiyen yüzeyi, yüzey alanı $dA$ olan sonsuz küçük elemanlara bölelim. Herbir elemandan geçen akı,

$$d\Phi = EdA\cos 0 = EdA$$

bulunur. Buradan da,

$$\Phi = \oint_S EdA = E\oint_S dA = E\left(4\pi r^2\right)$$

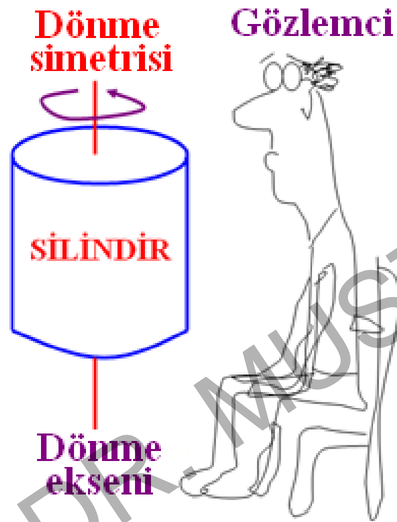
$$\varepsilon_0\Phi = q_{\text{iç}} = q \rightarrow \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = q \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{q}{r^2}$$

sonucuna ulaşılır.

**Simetri:** Bir cisme uygulanan fiziksel bir işlem (döndürme, öteleme gibi) sonucunda, cisim aynı kalıyorsa "simetriktir" denir.




Merkezinden geçen düşey eksen etrafında serbestçe dönebilen bir küre düşünelim. Gözlemci gözlerini kapattıktan sonra küreyi ekseni etrafında çevirelim. Gözlemci gözlerini açtığında, kürenin döndürülüp döndürüldüğünü anlayabilir mi?

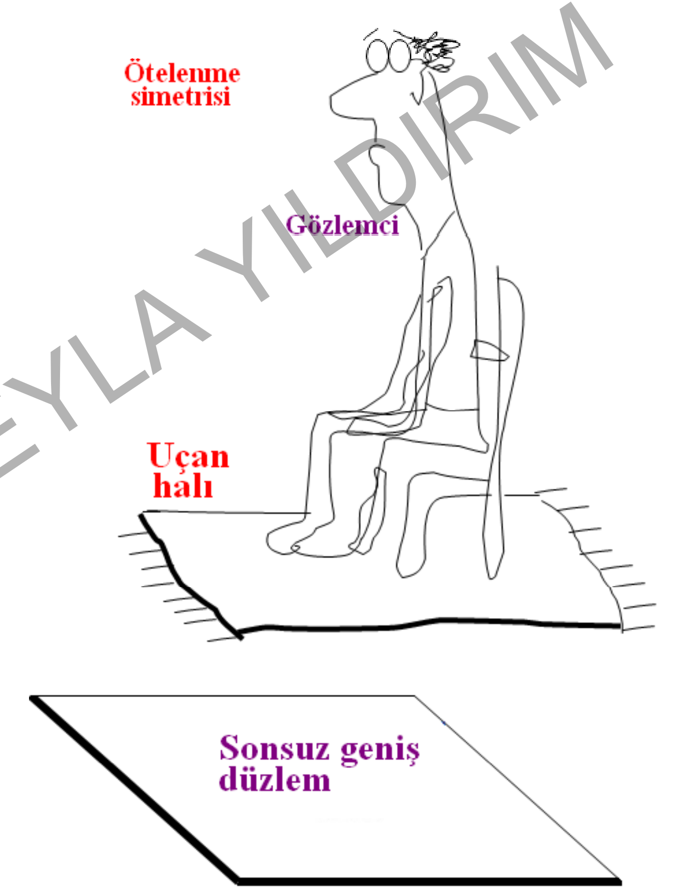



Ekseni etrafında serbestçe dönebilen bir silindir düşünelim. Gözlemci gözlerini kapattıktan sonra silindiri ekseni etrafında çevirelim. Gözlemci gözlerini açtığında, silindirin döndürülüp döndürülmediğini anlayabilir mi?

Cevap her iki örnek için de "hayır" olacaktır. Bu durumda, hem küre hem de silindir dönme eksenlerine göre simetriktir deriz.

## Ötelenme Simetrisi:

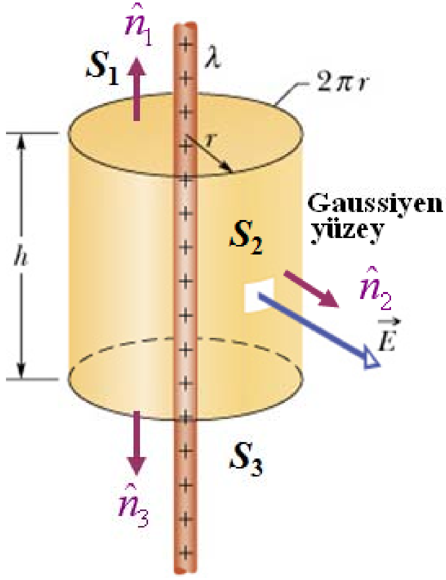
Sonsuz geniş bir düzlem düşünelim. Uçan halı üzerindeki bir gözlemci bu düzlemin üzerinde sabit bir yükseklikte olsun. Gözlemci gözlerini kapattıktan sonra bir miktar ötelensin. Gözlerini açtığında, hareket edip etmediğini anlayabilir mi? Cevap "hayır" olacaktır. Bu durumda, düzlem ötelenme simetrisine sahiptir deriz.




## Gauss Yasası Uygulanırken İzlenecek Yol:

- Yük dağılımını geometrik olarak çiziniz.
- Yük dağılımının simetrisini ve elektrik alanına etkisini belirleyiniz.
- Gauss yasası her kapalı yüzey için geçerlidir. $\Phi$ akısının en kolay hesaplanabileceği en uygun yüzeyi belirleyiniz.
- Elektrik alanı hesaplamak için Gauss yasasını uygulayınız.

# Sonsuz Uzunlukta Düzgün Yüklü Çubuğun Oluşturduğu Elektrik Alan :



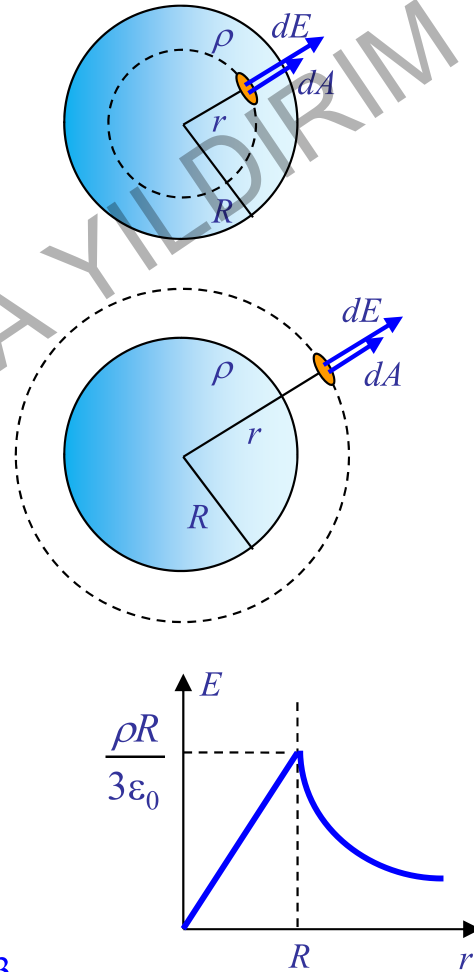

Şekilde düzgün $\lambda$ çizgisel yük yoğunluğuna sahip bir çubuk verilmiştir. Çubuğun simetrisi dikkate alınırsa, oluşturduğu elektrik alanın kendinden dışarı doğru ve $r$ uzaklığındaki tüm noktalarda şiddetinin de aynı olduğu ortaya çıkar. Bu yüzden, çubuğu eksen alan $r$ yarıçaplı, $h$ yüksekliğinde silindirik bir yüzey Gaussiyen yüzey olarak seçilebilir.

Gaussiyen yüzeyi üç farklı yüzeyin birleşimi gibi düşünebiliriz: Üst yüzey $S_1$, yanal yüzey $S_2$ ve taban yüzey $S_3$. Yüzeyden geçen net akı, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ olacaktır. $S_1$ ve $S_3$ yüzeylerinde, yüzey normali ile elektrik alan vektörleri birbirlerine dik olduğu için $\Phi_1$ ve $\Phi_3$ akıları sıfırdır. Bu durumda net akı,

$$\Phi = \Phi_2 = \int_{S_2} E dA = E(2\pi rh)\cos 0 = 2\pi rhE$$

Gauss yasasından: $\Phi = \dfrac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{2k\lambda}{r}$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ ve düzgün hacimsel yük yoğunluğu $\rho$ olan bir kürenin içinde ve dışındaki bölgelerde elektrik alanını bulunuz.



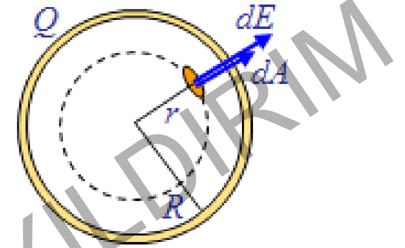

$$r < R \rightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \rightarrow E \oint_S dA \cos 0 = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{iç} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \rightarrow E\left(4\pi r^2\right) = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$$r > R \rightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \rightarrow E \oint_S dA \cos 0 = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

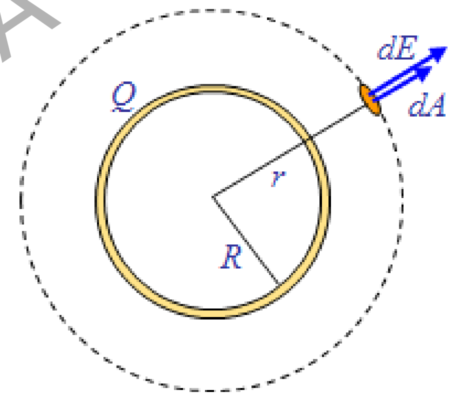
$$q_{iç} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \rightarrow E\left(4\pi r^2\right) = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ ve $Q$ yükünün yüzeyine düzgün dağıldığı ince küresel bir kabuğun içinde ve dışındaki bölgelerde elektrik alanını bulunuz.



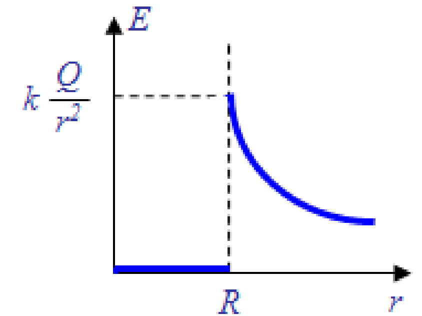

$$r < R \quad \rightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{iç} = 0 \quad \rightarrow \quad dA \neq 0 \ \text{olduğundan} \ E = 0$$

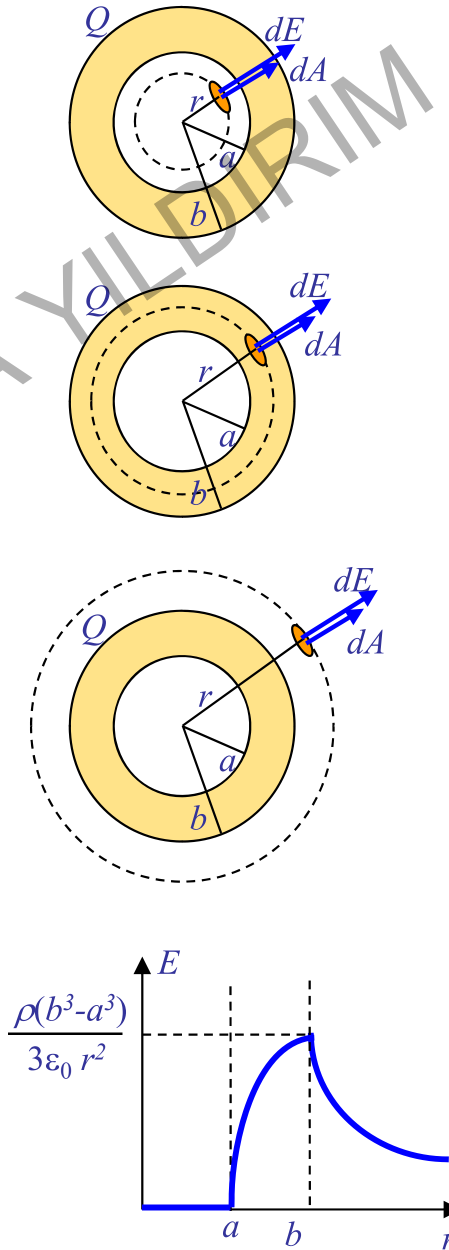



$$r > R \quad \rightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \rightarrow E \oint_S dA \cos 0 = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{iç} = Q \rightarrow E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{Q}{r^2}$$



**Örnek :** İç yarıçapı $a$, dış yarıçapı $b$ ve düzgün hacimsel yük yoğunluğu $\rho$ olan küresel bir kabuk için, $r < a$; $a < r < b$ ve $r > b$ bölgelerindeki elektrik alanını bulunuz.



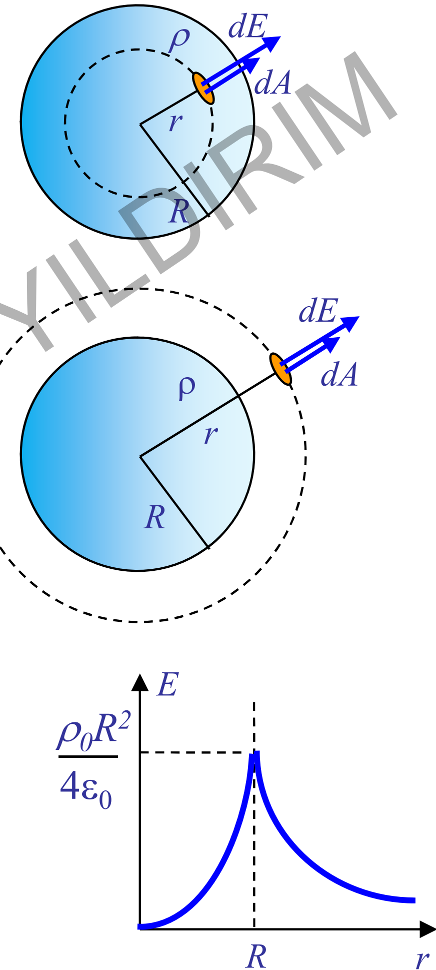

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$r < a \rightarrow \quad q_{iç} = 0 \quad \rightarrow \quad dA \neq 0$ olduğundan $E = 0$

$$a < r < b \rightarrow E\left(4\pi r^2\right) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - a^3\right)}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho\left(r^3 - a^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$r > b \rightarrow \quad E\left(4\pi r^2\right) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\left(b^3 - a^3\right)}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho\left(b^3 - a^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ ve hacimsel yük yoğunluğu $\rho = \rho_0 r$ olan bir kürenin içinde ve dışındaki bölgelerde elektrik alanını bulunuz.




$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

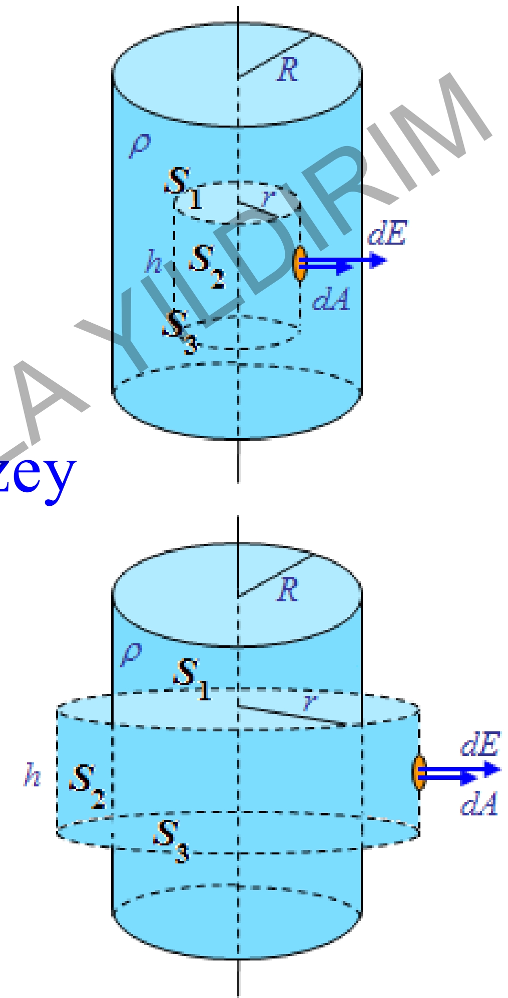
$$r < R \rightarrow \; q_{iç} = \int_0^r \rho\left(4\pi r'^2\, dr'\right) = \int_0^r \rho_0 r'\left(4\pi r'^2\, dr'\right) = \pi\rho_0 r^4$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{\pi\rho_0 r^4}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}$$

$$r > R \rightarrow \; q_{iç} = \int_0^R \rho\left(4\pi r'^2\, dr'\right) = \int_0^R \rho_0 r'\left(4\pi r'^2\, dr'\right) = \pi\rho_0 R^4$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{\pi\rho_0 R^4}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

**Örnek :** Yarıçapı R olan sonsuz uzunluktaki bir silindirin düzgün hacimsel yük yoğunluğu $\rho$' dur. silindirin içinde ve dışındaki noktalarda elektrik alanını bulunuz.

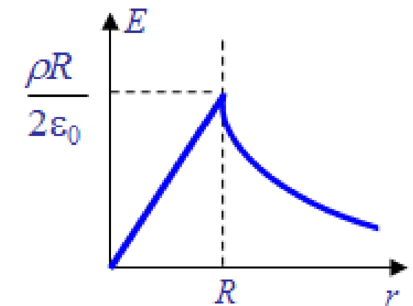



Yük dağılımının simetrisi nedeniyle, Gaussiyen yüzey olarak silindir seçilir. $S_1$ ve $S_3$ yüzeylerinden akıya hiçbir katkı gelmez ($d\vec{A} \perp \vec{E}$). Bu durumda:

$$\Phi = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$r < R \rightarrow E\left(2\pi r h\right) = \frac{\rho\left(\pi r^2 h\right)}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

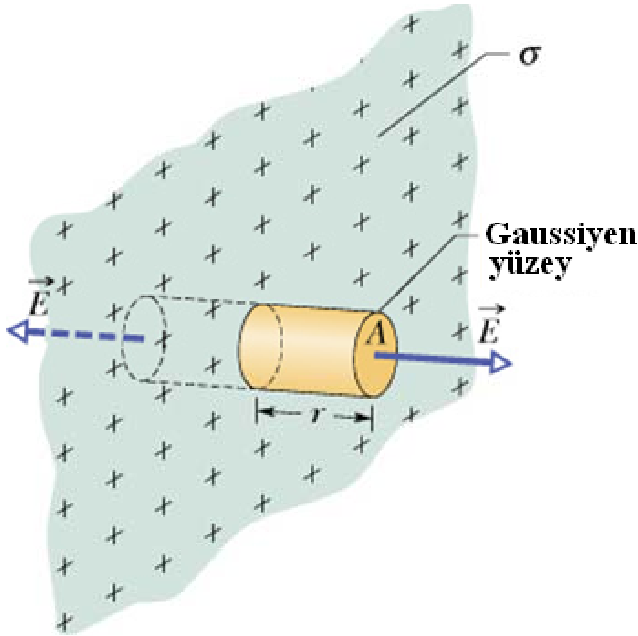
$$r > R \rightarrow E\left(2\pi r h\right) = \frac{\rho\left(\pi R^2 h\right)}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

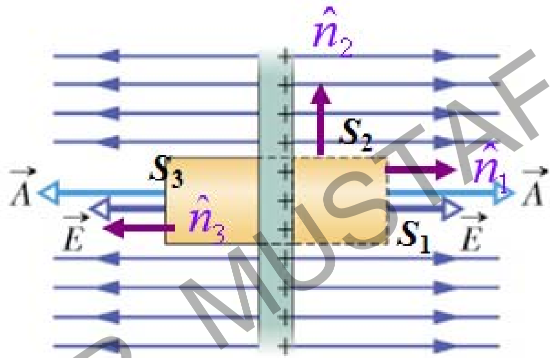


**ÖDEV :** Yarıçapı $R$ olan sonsuz uzunluktaki bir silindirin hacimsel yük yoğunluğu $\rho = \rho_0 r$ ile veriliyor. $\rho_0$ bir sabit ve $r$ ' de silindir ekseninden olan uzaklıktır. Silindirin içinde ve dışındaki bölgede elektrik alanını bulunuz ve silindir ekseninden olan uzaklığa karşı değişimini çiziniz.

**ÖDEV :** İç yarıçapı $a$, dış yarıçapı $b$ olan $\rho$ düzgün yük yoğunluğuna sahip sonsuz uzunlukta bir silindirin ekseni üzerinde, düzgün $\lambda$ çizgisel yükü yaşıyan sonsuz uzun bir çubuk yerleştirilmiştir. $r < a$ ; $a < r < b$ ; $r > b$ bölgelerinde elektrik alanlarını bulunuz.

# Sonsuz Geniş, Yalıtkan, Yüklü Plakanın Oluşturduğu Elektrik Alan :



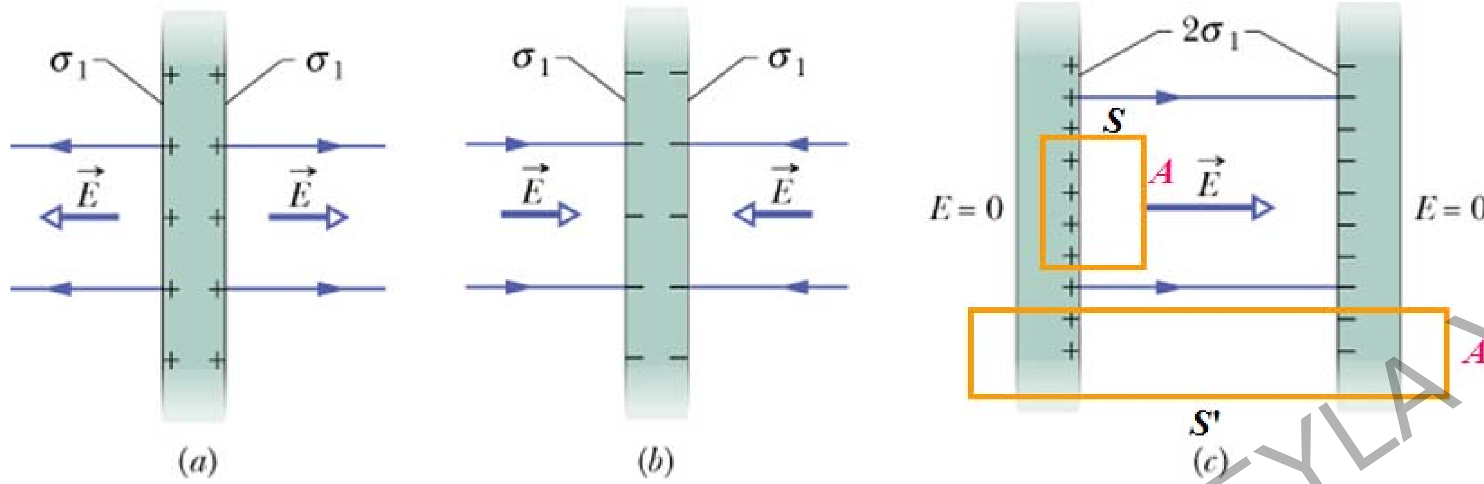




Plakanın pozitif ve düzgün $\sigma$ yüzey yük yoğunluğuna sahip olduğunu varsayalım. Simetri nedeniyle elektrik alan plakaya dik, dışarı doğru ve büyüklüğü her yerde aynıdır. Şekildeki gibi, plakanın ortadan kestiği, kesit alanı $A$ olan silindirik bir Gaussiyen yüzey seçebiliriz. Silindiri üç farklı yüzeyden oluşmuş gibi düşünebiliriz: Sağ kesit $S_1$, yanal yüzey $S_2$ ve sol kesit $S_3$. Yüzeyden geçen net akı, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ olacaktır.

$\Phi_1 = \Phi_3 = EA\cos 0 = EA$ ve $\Phi_2 = 0$ $(\theta = 90°)$

$\Phi = 2EA$

Gauss yasasından: $\Phi = \dfrac{q_{\text{iç}}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$



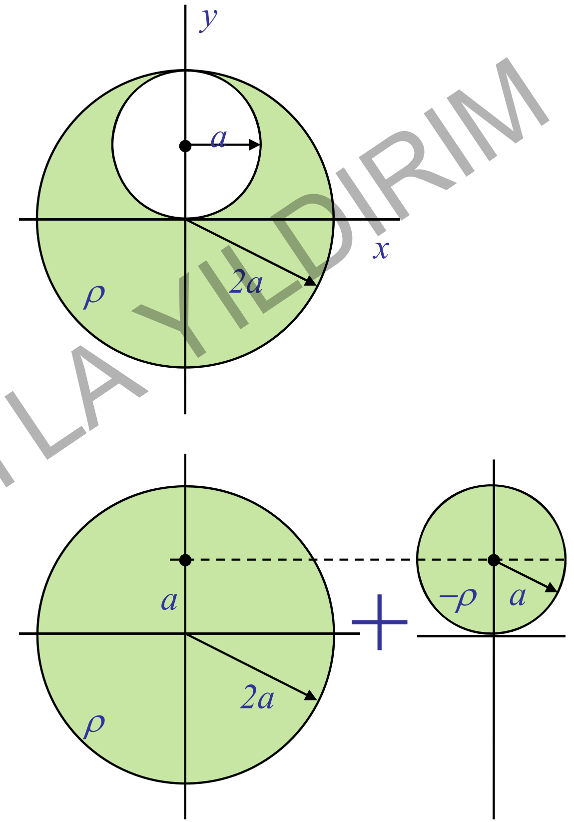

Yüzeysel yük yoğunlukları $\sigma_1$ ve -$\sigma_1$ olan sonsuz geniş paralel iki iletken plaka olsun. Plakalar birbirine yaklaştırılırsa, yükler plakaların birbirine bakan yüzeylerinde toplanır. Plakalar arasındaki bölgede elektrik alanını bulmak için, kesit alanı $A$ olan silindirik bir Gaussiyen yüzey (S) seçerek Gauss yasasını uygulayabiliriz:

$$\Phi = EA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma_1 A}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

Plakaların dışındaki bölgelerdeki elektrik alanı için de, kesit alanı $A'$ olan S' silindirik Gaussiyen yüzeyini seçer ve Gauss yasasını uygularsak:

$$\Phi = EA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_1}{\varepsilon_0} = 0 \quad \rightarrow \quad E = 0$$

**Örnek :** Şekilde gösterildiği gibi, yarıçapı $2a$ ve düzgün hacimsel yük yoğunluğu $\rho$ olan bir küreden $a$ yarıçaplı bir bölge çıkarılmıştır. Çıkarılan kısmın tam ortasındaki elektrik alan nedir?

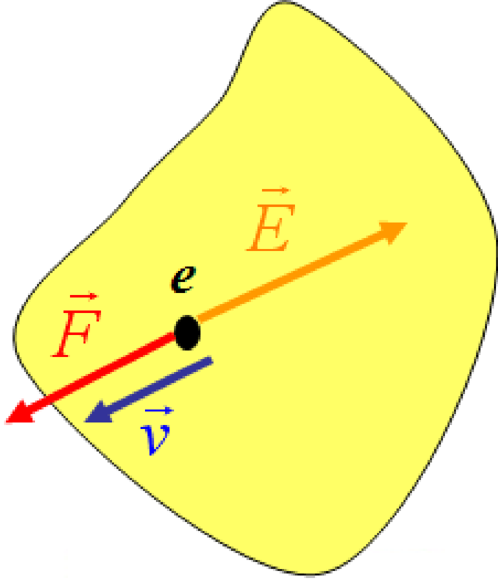



Verilen yük dağılımını, $\rho$ ve $-\rho$ düzgün yük yoğunluklarına sahip $2a$ ve $a$ yarıçaplı iki kürenin toplamı gibi düşünebiliriz. Dolayısı ile, ilgili noktadaki toplam elektrik alan:

$$E = \left.\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right|_{r=a} + \left.\left(-\frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\right)\right|_{r'=0} = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$$

olarak bulunur.

# Bir İletken İçindeki Elektrik Alan :




Soldaki iletkeni gözönüne alalım. İletkenler, içinde serbestçe dolaşabilen çok sayıda elektron barındıran malzemeler olarak tanımlanır. İletkenin içinde $E \neq 0$ olduğunu düşünelim:

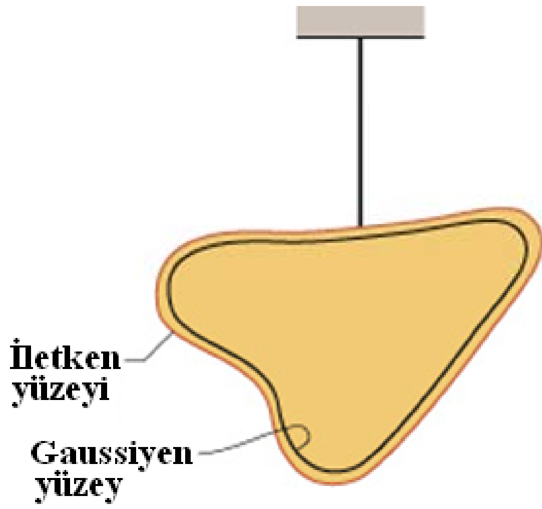
Bu durumda, iletkenin içindeki elektronlar sıfırdan farklı $\vec{F} = -e\vec{E}$ bir kuvvetin etkisi altında kalırlar. Bu nedenle elektronlar ivmeli bir hareket yapacak ve dolayısıyla bir elektrik akımı oluşturmaları gerekecektir. Böyle olması durumunda da;

(a) İletkenin ısınması gerekir.

(b) İletken çevresinde bir manyetik alan oluşmalıdır.

Şu ana kadar böyle etkiler hiç gözlenmemiştir. Buradan da,

"Bir iletkenin içindeki durgun elektrik alan $\vec{E}$ sıfırdır." sonucunu çıkarabiliriz.




# İzole Edillmiş Yüklü İletken :

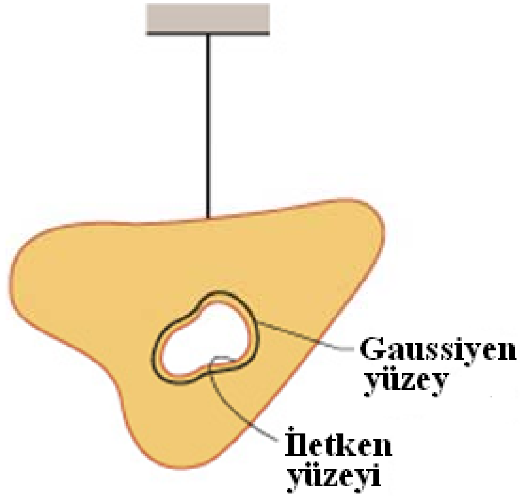
Yanda toplam yükü $q$ olan bir iletken verilmiştir. Yük, iletkende nasıl dağılmıştır? Bu soruyu yanıtlamak için, iletkenin hemen içinde bir Gaussiyen yüzey seçelim ve Gauss yasasını uygulayalım. İletkenin içinde $\vec{E} = 0$ olduğundan,

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} = 0 \quad \text{(Eş-1)} \quad \text{ve Gauss yasasından} : \Phi = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \text{(Eş-2)}.$$

Bu iki eşitlik birleştirilirse iletkenin içindeki yük sıfırdır ($q_{iç} = 0$). İletkenin sıfırdan farklı q yüküne sahip olduğunu bildiğimizden, bu yükün sadece iletkenin yüzeyinde bulunabileceği sonucuna ulaşırız.

"Elektrostatik yükler, iletkenin içinde bulunamazlar. Ancak yüzeyinde bulunabilirler."

# İçinde Boşluk Bulunan Yalıtılmış Yüklü İletken :

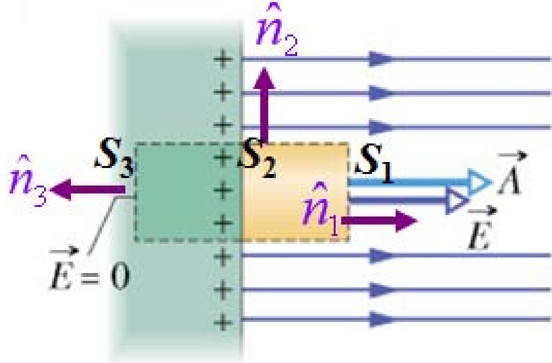



Yanda toplam yükü $q$ olan bir iletken verilmiştir. Boşluğun duvarında yük bulunurmu? Bu soruyu yine, Gauss yasası yardımıyla cevaplayabiliriz. Bunun için, şekildeki gibi boşluğun hemen dışında bir Gaussiyen yüzey seçebiliriz. İletkenin içinde $\vec{E} = 0$ olduğundan,

$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} = 0$ (Eş-1) ve Gauss yasasından: $\Phi = \dfrac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$ (Eş-2).

Bu iki eşitlik birleştirilirse seçilen Gaussiyen yüzeyin içindeki yük sıfırdır ($q_{iç} = 0$). Dolayısıyla, boşluk duvarında herhangi bir yuk yoktur. Özetleyecek olursak; "İletken içindeki boşluğun duvarlarında yük bulunamaz. Tüm yük iletkenin dış yüzeyinde bulunabilir".

## Yüklü İletkenin Hemen Dışındaki Elektrik Alan :



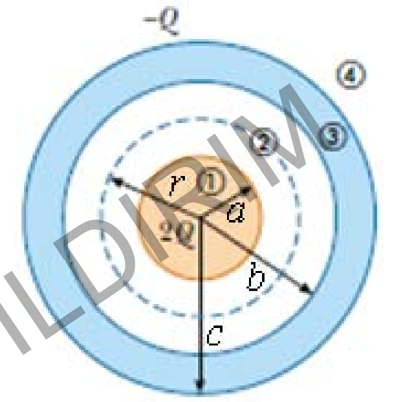

Bir iletkenin içindeki elektrik alan sıfırdır. Ancak, dışındaki elektrik alan sıfır değildir. Yüzeyin her noktasında yüzeye diktir. Böyle olmasaydı, elektrik alanın yüzeye paralel bir bileşeni olurdu ve yüzeyde bulunan yüklerin ivmelenmesine sebep olurdu. Bu ise "durgun elektrik" kabullenmemize aykırı olurdu.

Gauss yasasını uygulamak için, şekideki gibi silindirik bir Gaussiyen yüzey kullanacağız. Bu silindirik yüzey $S_1, S_2$ ve $S_3$ gibi üç farklı yüzeyden oluşur. Net akı, bu yüzeylerden geçen akıların toplamı olacaktır: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$.

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= EA\cos 0 = EA \\ \Phi_2 &= EA'\cos 90° = 0 \\ \Phi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \Phi = EA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q_{iç}}{A}\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$\sigma = \dfrac{q_{iç}}{A}$, yüzeysel yük yoğunluğu tanımından, $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ bulunur.

**Örnek :** Yarıçapı $a$ olan $2Q$ düzgün yüküne sahip bir küre, şekildeki gibi iç yarıçapı $b$ ve dış yarıçapı $c$ olan $-Q$ yüküne sahip iletken bir küre kabuğunun merkezinde bulunmaktadır. 1, 2, 3 ve 4 nolu bölgelerdeki elektrik alanını bulunuz.




$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

1 nolu bölge: $E\left(4\pi r^2\right) = \dfrac{2Qr^3}{\varepsilon_0 a^3} \rightarrow E = k\dfrac{2Qr}{a^3}$

2 nolu bölge: $E\left(4\pi r^2\right) = \dfrac{2Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = k\dfrac{2Q}{r^2}$

3 nolu bölge: $E = 0$ (İletkenin içinde yük bulunamaz. İletkenin iç çeperinde $-2Q$ dış çeperinde $Q$ yükü birikir.)

4 nolu bölge: $E\left(4\pi r^2\right) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = k\dfrac{Q}{r^2}$

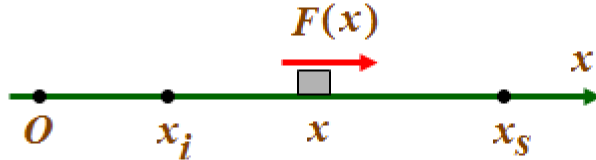
# BÖLÜM-24
# Elektrik Potansiyel

Bu bölümde, elektrik alanla ilgili elektrik potansiyel (*V*) kavramını öğreneceğiz. Bu bağlamda aşağıdaki konulara değineceğiz:

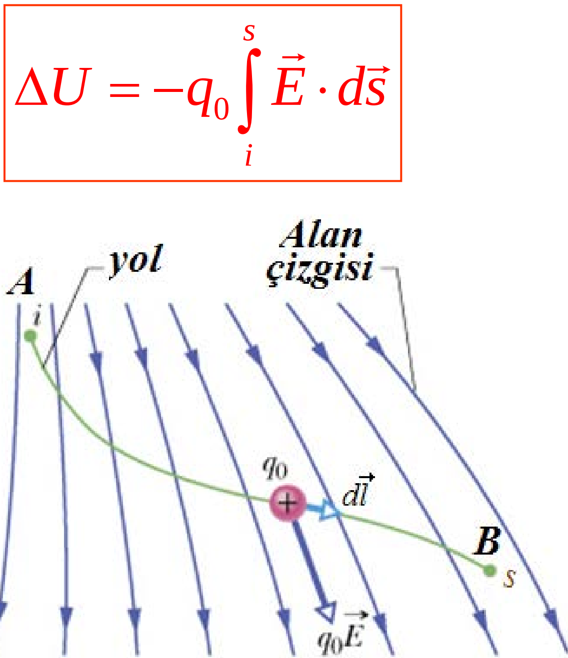
**Elektrik alandan potansiyelin bulunması.**
**Potansiyelden elektrik alanın bulunması.**
**Nokta yük ve yük grubunun oluşturduğu potansiyel.**
**Sürekli yük dağılımlarının oluşturduğu potansiyel.**
**Yük sistemlerinin potansiyel enerjisi.**
**Eş-potansiyel yüzeyler ve elektrik alan çizgileri.**
**İzole bir iltekenin oluşturduğu potansiyel.**

# Elektrik Potansiyel Enerji :

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_s} F(x)dx$$




$$\Delta U = -q_0 \int_i^s \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



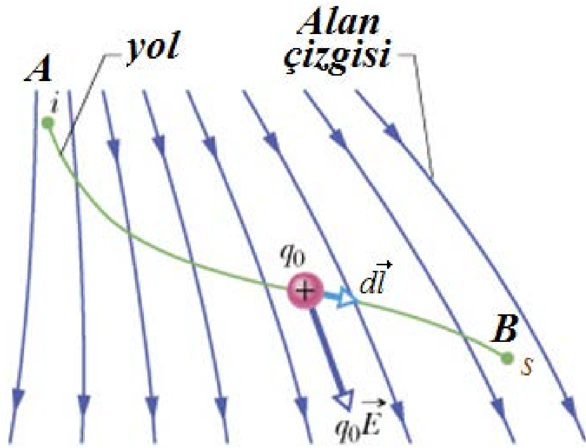

Korunumlu bir kuvvetin yaptığı iş, cismin potansiyel enerjisindeki değişimin negatif işaretlisidir. Korunumlu bir kuvvetin etkisiyle cisim $x_i$ noktasından $x_s$ noktasına hareket etmişse,

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

yazılır. $q_0$ nokta yükü, bilinen bir elektrik alanı $(\vec{E})$ içinde, $\vec{F} = q_0\vec{E}$ elektrik kuvvetinin etkisiyle $A$ noktasından $B$ noktasına gitsin. Yükün potansiyel enerjisindeki değişim,

$$\Delta U = -\int_i^s \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_i^s \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

olacaktır. Bu değişim $q_0$ yüküne bağlıdır.




# Elekrik Potansiyel ($V$):

$A$ ve $B$ noktaları arasındaki elektrik potansiyel fark ($\Delta V$), bu noktalar arasında taşınan birim yük başına potansiyel enerji değişimi olarak tarif edilir:

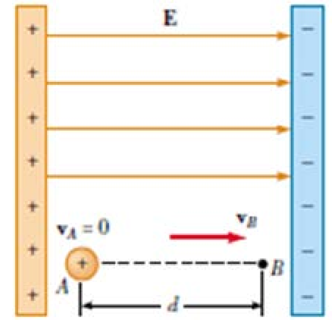
$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{W}{q_0} \rightarrow \Delta V = V_s - V_i = -\int_i^s \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Noktalardan birisinin potansiyeli biliniyorsa, diğer noktanın elektrik potansiyeli bulunabilir. Genellikle, yükten çok uzaktaki bir noktanın potansiyeli sıfır alınır ($V_i = V_\infty = 0$). Bu durumda, herhangi bir $P$ noktasının potansiyeli,

$$V_P = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ifadesiyle verilir. SI sistemindeki birimi J/C (volt)' dir.

**Örnek :** Bir proton, şekilde gösterildiği gibi büyüklüğü $8\times10^{4}$ V/m olan pozitif *x*-ekseni yönündeki düzgün bir elektrik alan içinde durgun halden serbest bırakılıyor. Proton elektrik alan yönünde 0.5 m gittiğinde,




*a*–) *A* ve *B* noktaları arasındaki elektriksel potansiyel fark ne kadardır.

*b*–) Bu iki nokta arasında, protonun potansiyel enerjisinde ne kadarlık bir değişim olmuştur?

*c*–) Proton B noktasına ulaştığındaki hızı ne olur?

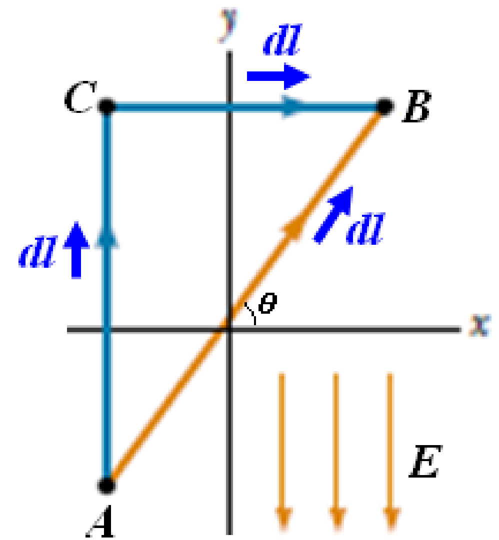
$$a\text{–)}\ V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^B Edl\cos 0 = -Ed = -\left(8\times10^{4}\right)\cdot(0.5)$$

$$V_B - V_A = -4\times10^{4}\ \ V$$

$$b\text{–)}\ \Delta U = q\Delta V \rightarrow \Delta U = \left(1.6\times10^{-19}\right)\cdot\left(-4\times10^{4}\right) = -6.4\times10^{-15}\ \ \text{J}$$

$$c\text{–)}\ \Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow \frac{1}{2}m_p v^2 = 6.4\times10^{-15} \rightarrow v = 2.77\times10^{6}\ \text{m/s}$$

**Örnek :** Şekildeki gibi, $-y$ yönünde büyüklüğü 325 V/m olan düzgün bir elektrik alan vardır. Koordinatı $(-0.2,-0.3)$ m olan $A$ noktası ile koordinatı $(0.4,0.5)$ m olan $B$ noktası arasındaki potansiyel farkını bulunuz.



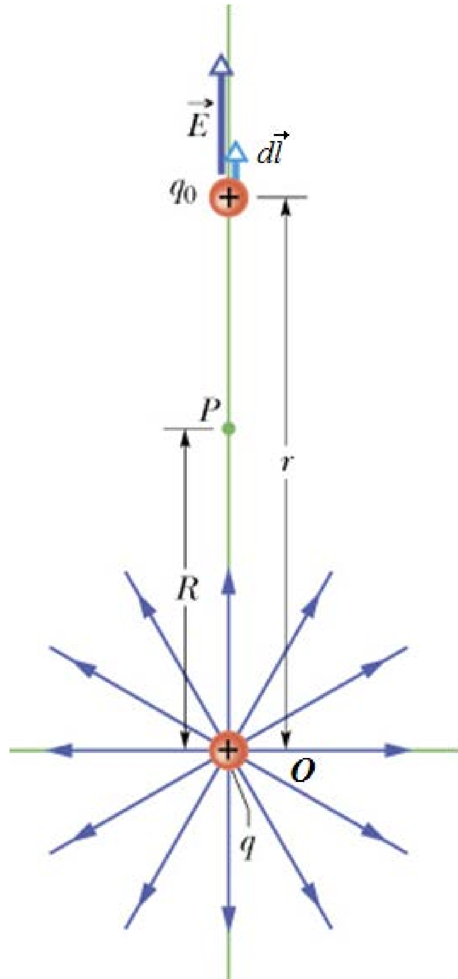

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^B Edl\cos(90+\theta) = E\left(\overline{AB}\right)\sin\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{0.6^2+0.8^2} = 1\,\text{m}\\ \sin\theta &= \left(\frac{0.8}{1}\right) = 0.8\end{aligned}\right\} \rightarrow V_B - V_A = 325(1)(0.8) = 260\ \text{V}$$

$$V_B - V_A = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^C Edl\cos 180 - \int_C^B Edl\cos 90$$

$$V_B - V_A = E\left(\overline{AC}\right) = 325(0.8) = 260\ \text{V}$$

# Nokta Yükün Potansiyeli :




Orijinde bir $q$ nokta yükü bulunsun. Yükten $R$ kadar uzaktaki $P$ noktasının potansiyelini bulmak için, $q_0$ test yükünü $P$ noktasından sonsuza götürmemiz gerekir. Böylece,

$$V_\infty - V_P = -\int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_R^\infty E dr \cos 0 = -\int_R^\infty E dr$$

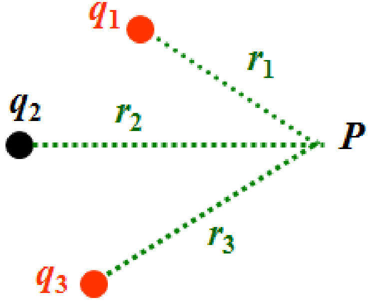
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \rightarrow -V_P = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_R^\infty$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$$

bulunur. $q$ nokta yükünün kendisinden $r$ kadar uzakta oluşturduğu elektrik potansiyel:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} = k \frac{q}{r}$$

# Nokta Yük Grubunun Oluşturduğu Potansiyel :




Şekilde üç nokta yükten oluşan bir sistem verilmiştir. Bu yüklerin herhangi bir *P* noktasında oluşturdukları elektrik potansiyel, her birinin ilgili noktada oluşturduğu potansiyellerin toplamıdır.

**1.** Her bir yükün P noktasında oluşturdukları elektrik potansiyeller bulunur:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} \;;\; V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} \;;\; V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_3}$$

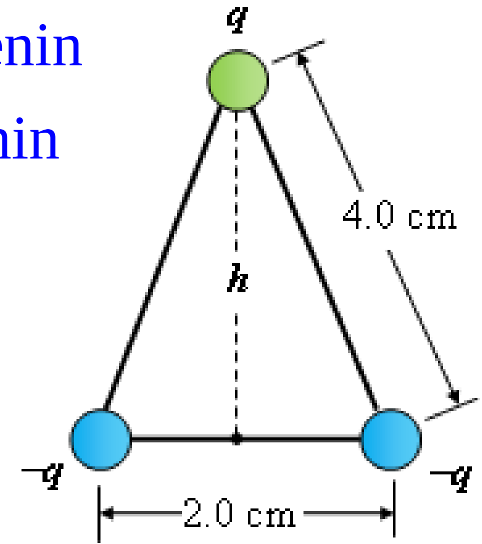
**2.** Tüm yüklerin oluşturdukları potansiyeller toplanır:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_3}$$

*n* tane nokta yükten oluşan bir sistem için bu ifade şöyle yazılır:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

**Örnek :** Şekilde gösterildiği gibi, ikizkenar bir üçgenin köşelerine üç nokta yük yerleştirilmiştir. $-q$ yüklerinin bulunduğu doğrunun tam orta noktasındaki elektrik potansiyelini hesaplayınız. ($q = 7\ \mu$C alımız).



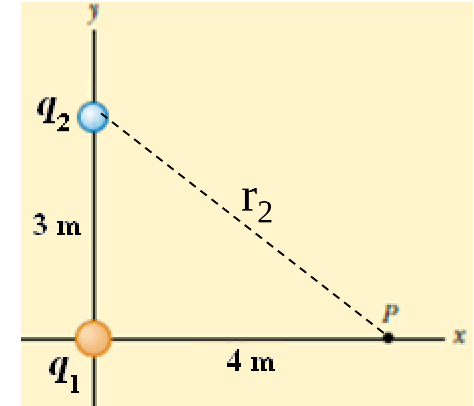

$$h = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}\ \text{cm}$$

$$V = V_{+q} + 2V_{-q} + = k\frac{q}{h} - 2k\frac{q}{r_{-q}}$$

$$V = \left(9\times10^{9}\right)\cdot\left(7\times10^{-6}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{15}\times10^{-2}} - \frac{2}{1\times10^{-2}}\right)$$

$$V = 63\times10^{5}\left(\frac{1}{\sqrt{15}} - 2\right) = -1.1\times10^{7}\ \text{V}$$

**Örnek :** Şekilde gösterildiği gibi, $q_1 = 2\ \mu$C' luk yük orijinde ve $q_2 = -6\ \mu$C' luk yük ise $y = 3$ m noktasında bulunmaktadır. Bu iki yükün, $x = 4$ m noktasında ($P$) oluşturdukları toplam elektrik potansiyel ne kadardır? $q_3 = 3\ \mu$C' luk üçüncü bir yükü $P$ noktasına getirmek için yapılması gereken işi bulunuz.

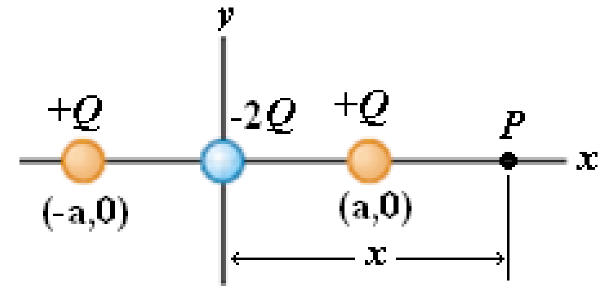



$$V = V_1 + V_2 = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2}$$

$$V = \left(9\times10^9\right)\cdot\left(\frac{2\times10^{-6}}{4} - \frac{6\times10^{-6}}{5}\right) = -6.3\times10^3\ \text{V}$$

$$W = q_3\left(V_P - V_\infty\right) = 3\times10^{-6}\left(-6.3\times10^3 - 0\right) = -18.9\times10^{-3}\ \text{J}$$

**Örnek :** Şekilde gösterildiği gibi, $Q$, $-2Q$ ve $Q$ nokta yükleri $x$-ekseni üzerine aralarındaki mesafe $a$ olacak şekilde yerleştirilmişlerdir. $x > a$ olmak üzere, $x$-ekseni üzerindeki herhangi bir noktadaki elektrik potansiyelini bulunuz. $x \gg a$ durumundaki potansiyel ifadesini türetiniz.

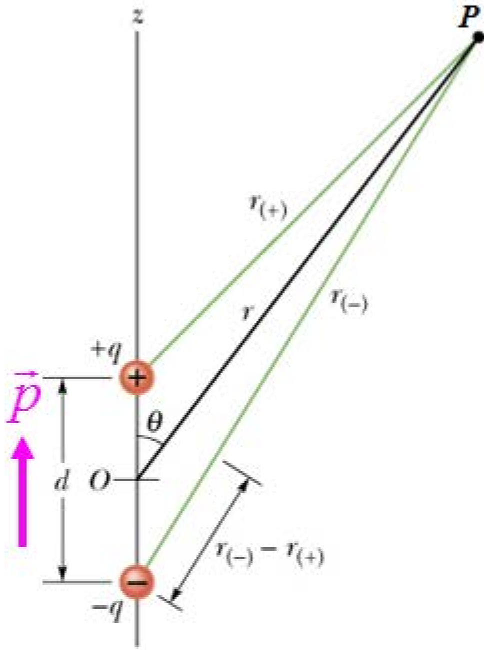



$$V = V_1 + V_2 + V_3 = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2} + k\frac{q_3}{r_3}$$

$$V = kQ\left(\frac{1}{x+a} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-a}\right) = kQ\left(\frac{2x}{x^2 - a^2} - \frac{2}{x}\right) = \frac{2kQa^2}{\left(x^3 - a^2 x\right)}$$

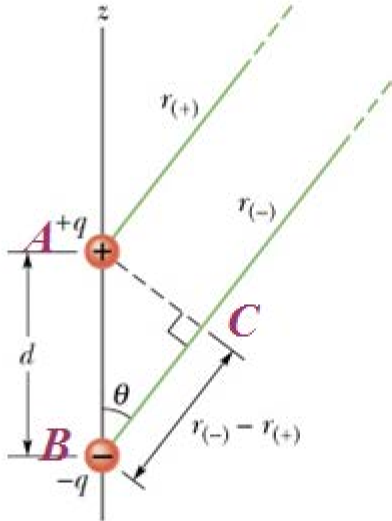
$$x \gg a \rightarrow V = \frac{2kQa^2}{x^3\left(1 - a^2/x^2\right)} \approx \frac{2kQa^2}{x^3}$$

# Elektrik Dipolünün Oluşturduğu Potansiyel :




Solda bir elektrik dipolü verilmiştir. Dipolü oluşturan nokta yüklerin $P$ noktasında oluşturdukları $V$ potansiyelini bulalım. $P$ noktası, dipolün merkezi olan $O$ noktasından $r$ kadar uzakta ve $OP$ doğrusu dipol ekseni ile $\theta$ açısı yapsın. Bu durumda $P$ noktasındaki potansiyel:

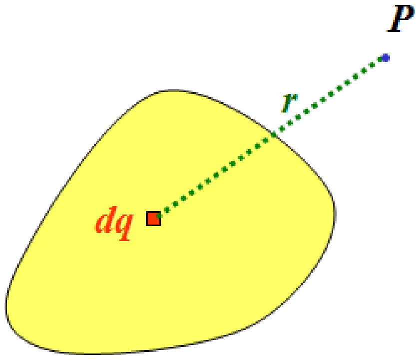
$$V = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} - \frac{q}{r_{(-)}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}.$$




olur. $d$ dipolü oluşturan yükler arasındaki mesafe olmak üzere, $r \gg d$ yaklaşımı yapılırsa $r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2$, $ABC$ dik üçgeninden de $r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta$ yazılabilir. Bu durumda,

$$V \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2},$$

sonucuna ulaşılır. Burada, $p = qd$ kısaltması yapılmıştır.




# Sürekli Yük Dağılımlarının Oluşturduğu Potansiyel :

Şekildeki sürekli yük dağılımına sahip bir cisim verilmiştir. Yük dağılımının herhangi bir noktada oluşturduğu elektrik potansiyel $V$ üstüste binme ilkesiyle şu şekilde bulunur:

**1.** Cisim, sonsuz küçük $dq$ yüküne sahip elemanlara bölünür.

çizgisel yük dağılımı $\rightarrow dq = \lambda d\ell$

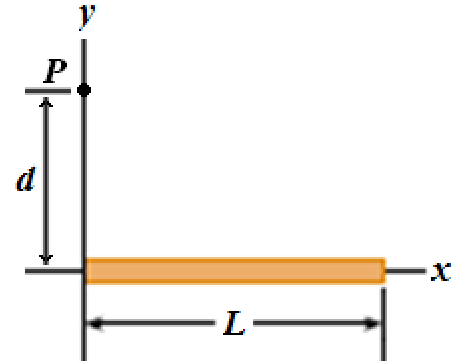
yüzeysel yük dağılımı $\rightarrow dq = \sigma dA$

hacimsel yük dağılımı $\rightarrow dq = \rho dV$

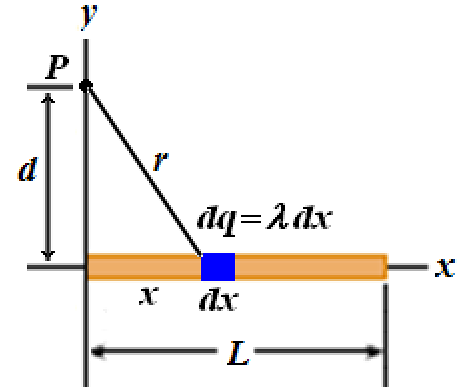
**2.** $dq$ yükünün $P$ noktasında oluşturduğu $dV$ potansiyeli yazılır: $dV = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r}$

**3.** Tüm yüklerin katkısı, yük dağılımı üzerinden integral alınarak bulunur: $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \dfrac{dq}{r}$

**Örnek :** Şekilde $L$ uzunluğunda ve $\lambda$ düzgün yük yoğunluğuna sahip ince bir çubuk verilmiştir. Çubuğun sol ucundan, çubuğa dik doğrultuda $d$ kadar yukardaki bir $P$ noktasındaki elektrik potansiyelini bulunuz.




Çubuğun sol ucundan $x$ kadar ötede seçilen $dx$ elemanının yükü $dq = \lambda dx$ ve $P$ noktasına uzaklığı da $r = \sqrt{d^2 + x^2}$ olduğundan, $dq$ yükünün $P$ noktasında oluşturduğu elektrik potansiyeli:



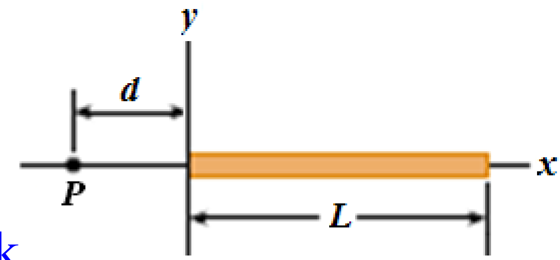

$$dV = k\frac{dq}{r} = k\frac{\lambda dx}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

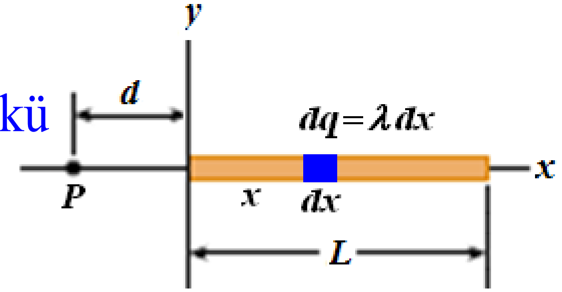
$$V = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{d^2 + x^2}} = k\lambda \left[ \ln\left( x + \sqrt{d^2 + x^2} \right) \right]_0^L = k\lambda \ln\left( \frac{L + \sqrt{d^2 + L^2}}{d} \right)$$

bulunur.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{d^2 + x^2}} = \ln\left( x + \sqrt{d^2 + x^2} \right)$$

**Örnek :** Şekilde $L$ uzunluğunda ve $\lambda = \alpha x$ yük yoğunluğuna sahip ince bir çubuk verilmiştir. Burada $\alpha$ pozitif bir sabit ve $x$ çubuğun sol ucundan olan uzaklıktır. Çubuğun sol ucundan yatay doğrultuda $d$ kadar uzaklıkta bir $P$ noktasındaki elektrik potansiyeli bulunuz.




Çubuğun sol ucundan $x$ kadar ötede seçilen $dx$ elemanının yükü $dq = \lambda dx$ ve $P$ noktasına uzaklığı da $r = x + d$ olduğundan, $dq$ yükünün $P$ noktasında oluşturduğu elektrik potansiyeli:

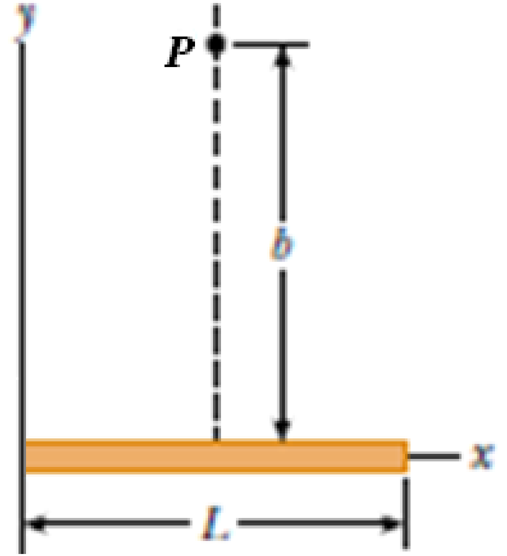
$$dV = k\frac{dq}{r} = k\frac{\alpha x dx}{x+d} = k\alpha\frac{xdx}{x+d}$$

$$V = k\alpha\int_0^L \frac{xdx}{x+d} = k\alpha\left[x - d\ln(x+d)\right]_0^L = k\alpha\left[L - d\ln\left(\frac{L+d}{d}\right)\right]$$

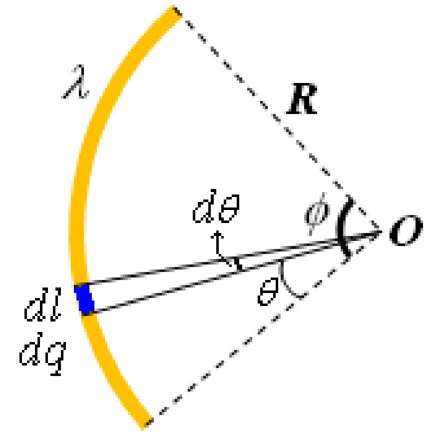
bulunur.

$$\int \frac{xdx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$$

**ÖDEV :** Şekilde $L$ uzunluğunda ve $\lambda = \alpha x$ yük yoğunluğuna sahip ince bir çubuk verilmiştir. Burada $\alpha$ pozitif bir sabit ve $x$ çubuğun sol ucundan olan uzaklıktır. Çubuğun ortasından dik doğrultuda $b$ kadar uzaklıkta bir $P$ noktasındaki elektrik potansiyeli bulunuz.



**Örnek :** Homojen yüklü ince bir çubuk, $R$ yarıçaplı çemberin bir parçası olacak şekilde bükülüyor. Şekilde verildiği gibi, yayı gören açı $\phi$' dir. Yayın çizgisel yük yoğunluğu $\lambda$ ise, çemberin merkezindeki (O noktası) elektrik potansiyeli nedir?




Yay üzerinde seçilen $dl$ elemanının yükü $dq = \lambda dl$ dir.

$O$ noktasındaki toplam elektrik potansiyeli:

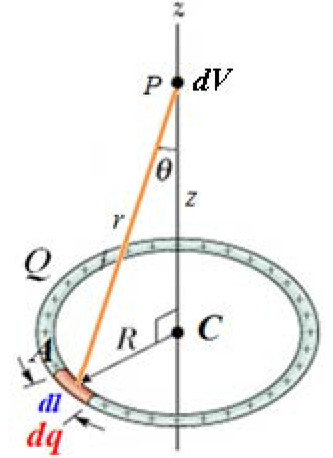
$$dV = k\frac{dq}{r} = k\lambda\frac{dl}{R} = k\lambda\frac{Rd\theta}{R} = k\lambda d\theta \;\rightarrow\; V = k\lambda\int_0^{\phi} d\theta = k\lambda\phi$$

olur.

$$\phi = \pi \;\; \text{(yarım çember)} \;\rightarrow\; V = k\lambda\pi = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

$$\phi = 2\pi \;\; \text{(tam çember)} \;\rightarrow\; V = k\lambda 2\pi = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$$

**Örnek :** $Q$ yükü $R$ yarıçaplı bir çember üzerine düzgün olarak dağılmıştır. Çemberin merkezinden dik olarak geçen $z$-ekseni üzerinde ve merkezden $z$ kadar uzaktaki $P$ noktasında elektrik potansiyelini bulunuz.




Çember üzerinde seçilen $dl$ elemanının yükü

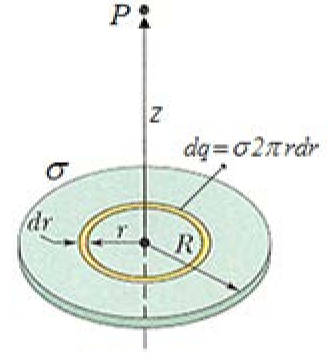
$dq = \lambda dl = (Q/2\pi R)dl$ ile verilir.

$P$ noktasındaki toplam elektrik potansiyeli:

$$dV = k\frac{dq}{r} = k\left(\frac{Q}{2\pi R}\right)\frac{dl}{r} \rightarrow V = k\left(\frac{Q}{2\pi R}\right)\frac{1}{r}\oint dl = k\frac{Q}{r} \quad ; \quad \oint dl = 2\pi R$$

$$V = k\frac{Q}{\sqrt{z^2+R^2}} \quad ; \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \;\; \rightarrow \;\; V = k\dfrac{Q}{R} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{(Q/2\pi R)}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0} \\ z \rightarrow \infty \rightarrow V = k\dfrac{Q}{z} \text{ (nokta yükün potansiyeli)} \end{array} \right\}$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ olan ince bir disk düzgün $\sigma$ yüzey yük yoğunluğuna sahiptir. Diskin merkezinden dik olarak geçen eksen üzerinde ve merkezden $z$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasında elektrik potansiyelini bulunuz.




Toplam yükü Q olan bir çemberin potansiyeli : $V = k\dfrac{Q}{\sqrt{z^2+r^2}}$

Seçilen çemberin toplam yükü $dq$, potansiyeli $dV$ dir.

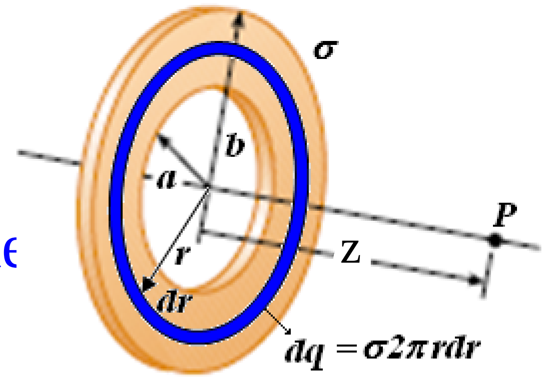
$$dV = k\frac{dq}{\sqrt{z^2+r^2}} = k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$V = \int_0^R dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+r^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2} - z\right]$$

**Örnek :** İç yarıçapı $a$ ve dış yarıçapı $b$ olan ince bir disk düzgün $\sigma$ yüzey yük yoğunluğuna sahiptir. Diskin merkezinden dik olarak geçen eksen üzerinde ve merkezden $z$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasında elektrik potansiyelini bulunuz.




Toplam yükü Q olan bir çemberin potansiyeli : $V = k\dfrac{Q}{\sqrt{z^2+r^2}}$

Seçilen çemberin toplam yükü $dq$, potansiyeli $dV$ dir.

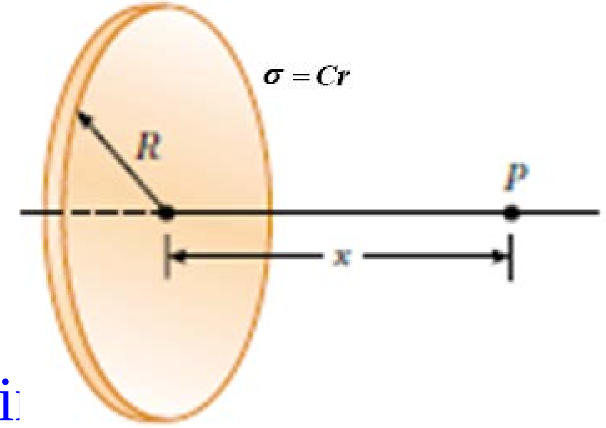
$$dV = k\frac{dq}{\sqrt{z^2+r^2}} = k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

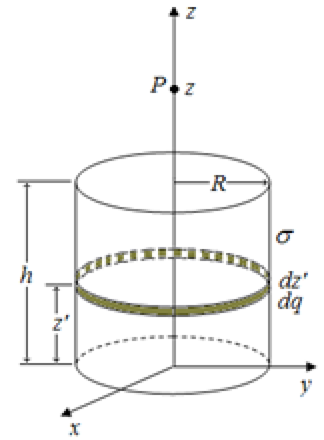
$$V = \int_a^b dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{rdr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+r^2}\right]_a^b = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+b^2} - \sqrt{z^2+a^2}\right]$$

**ÖDEV :** Yarıçapı $R$ olan ince bir disk $\sigma = Cr$ ile değişen yüzey yük yoğunluğuna sahiptir. $C$ pozitif bir sabit ve $r$ disk merkezinden olan uzaklıktır. Diskin merkezinden dik olarak geçen eksen üzerinde ve merkezden $x$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasında elektrik potansiyelini bulunuz.



**Örnek :** Yarıçapı $R$ ve yüksekliği $h$ olan ince silindirik bir kabuk, $xy$-düzlemine tabanı orijinde olacak şekilde yerleştirilmiştir. Silindir düzgün $\sigma$ yük yoğunluğuna sahip olduğuna göre, ekseni üzerindeki herhangi bir noktadaki ($P$) elektrik potansiyelini bulunuz.




Toplam yükü Q olan bir çemberin potansiyeli : $V = k\dfrac{Q}{\sqrt{z^2+r^2}}$

Seçilen çemberin toplam yükü $dq$, potansiyeli $dV$ dir.

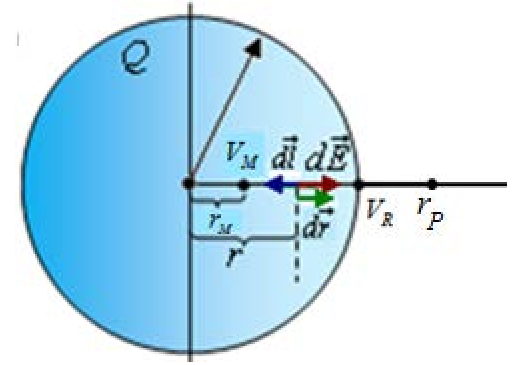
$$dV = k\frac{dq}{\sqrt{(z-z')^2+R^2}} = k\frac{\sigma 2\pi R dz'}{\sqrt{(z-z')^2+R^2}}$$

$$V = \int_0^h dV = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\int_0^h \frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2+R^2}}$$

$$V = -\ln\left[2\left(\sqrt{(z-z')^2+R^2}+z-z'\right)\right]_0^h = \ln\left[\frac{\sqrt{z^2+R^2}+z}{\sqrt{(z-h)^2+R^2}+z-h}\right]$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = -\ln\left[2\left(\sqrt{(a-x)^2+b^2}+a-x\right)\right]$$

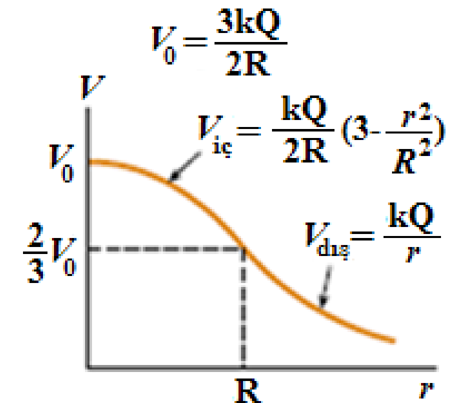
**Örnek :** Yarıçapı $R$ olan bir küre düzgün $\rho$ hacimsel yük yoğunluğuna sahiptir. Sonsuzun potansiyelini sıfır kabul ederek, küre dışında ve küre içinde elektrik potansiyelini bulunuz.




$$V_P - V_\infty = -\int_\infty^{r_P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_\infty^{r_P} Edl\cos(180) \quad ; \; [dl = -dr]$$

$$V_P - V_\infty = -\int_\infty^{r_P} E(-dr)(-1) = -\int_\infty^{r_P} Edr = -kQ\int_\infty^{r_P} \frac{dr}{r^2}$$

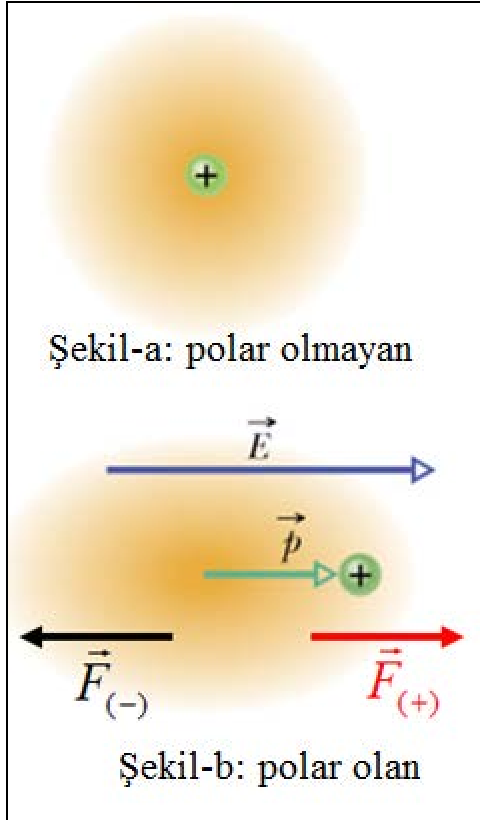
$$V_P = -kQ\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^{r_P} = k\frac{Q}{r_P} \qquad V(r) = k\frac{Q}{r} \;\; ; \;\; r > R$$




$$V_M - V_R = -\int_R^{r_M} Edr = -\int_R^{r_M}\left(k\frac{Qr}{R^3}\right)dr = -\frac{kQ}{R^3}\int_R^{r_M} rdr = -\frac{kQ}{2R^3}\left(r_M^2 - R^2\right)$$

$$V_M = \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{2R^3}\left(r_M^2 - R^2\right) \rightarrow V(r) = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \;\; ; \;\; r < R$$

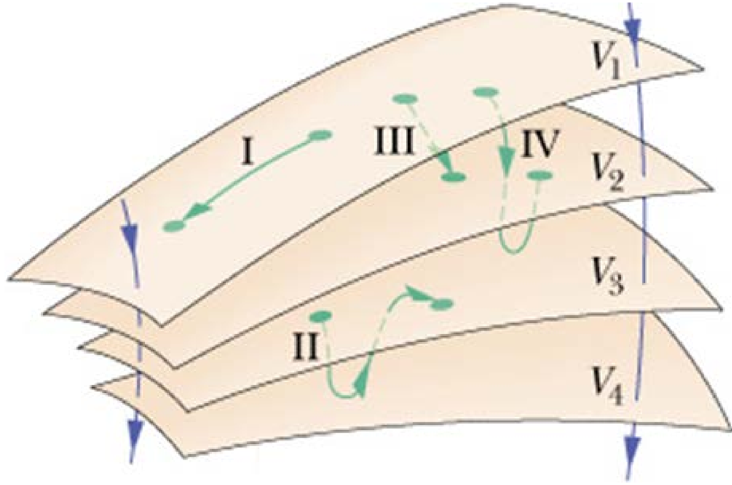
# İndüklenmiş Dipol Moment :




Su molekülü ($H_2O$) gibi birçok molekül kendiliğinden bir dipol momente sahiptir. Bu tür moleküllere "polar" moleküller denir. Aksine, $O_2$ , $N_2$, ... gibi moleküllerin dipol momentleri sıfırdır. Bunlara da "polar olmayan" moleküller denir. Şekil-*a*' da böyle bir molekül resmedilmiştir. Pozitif yük ile çevresindeki negatif yük bulutu aynı merkezli olduğu için dipol momenti sıfırdır. Şekil-*b*' de, elektrik alan içindeki polar olmayan molekülde ne gibi bir değişim olduğu resmedilmiştir. Merkezleri çakışık olan pozitif yük ve negatif yük bulutu, elektrik kuvvetinin etkisi altında ayrışmıştır.

Böylece, polar olmayan molekül elektrik alan etkisiyle sıfırdan farklı bir dipol momente sahip hale gelmiştir. Buna "indüklenmiş dipol moment" ve moleküle de "kutuplanmış" tır denir. Elektrik alan kaldırıldığında, kutuplanma da ortadan kalkar ve dipol moment tekrar sıfır olur.

# Eş - Potansiyel Yüzeyler :




Potansiyelleri aynı olan noktaların oluşturduğu yüzeye eş-potansiyel yüzey denir. Şekilde dört farklı eş-potansiyel yüzey verilmiştir. Aralarındaki potansiyel farkının $\Delta V$ olduğu iki nokta arasında, $q$ yükünü bir noktadan diğerine götürmek için elektrik alan tarafından yapılan iş: $W = -q\Delta V$.

I numaralı yol : $\Delta V = 0$ olduğundan, $W_{\text{I}} = 0$ olur.

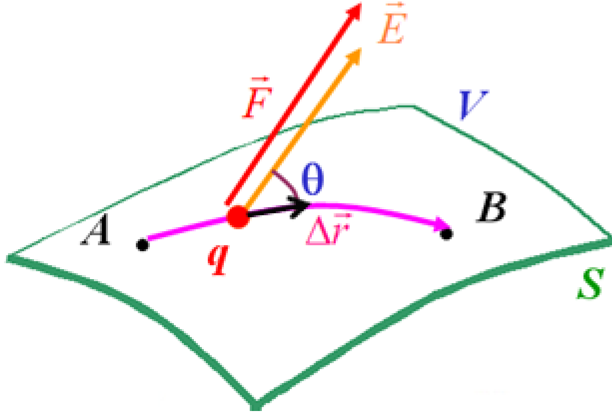
II numaralı yol : $\Delta V = 0$ olduğundan, $W_{\text{II}} = 0$ olur.

III numaralı yol : $W_{\text{III}} = q\Delta V = q\left(V_2 - V_1\right)$.

IV numaralı yol : $W_{\text{IV}} = q\Delta V = q\left(V_2 - V_1\right)$.

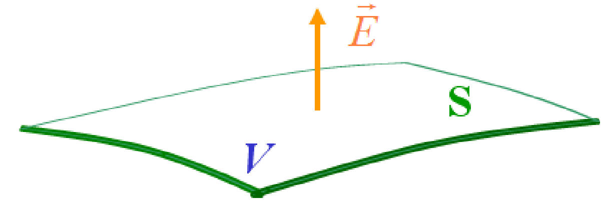
**Not :** Bir yükü, eş-potansiyel bir yüzeyde $\left(\Delta V = 0\right)$ hareket ettirmek için elektrik alan tarafından herhangi bir iş yapılmaz ($W = 0$).

# Elektrik Alan $\vec{E}$, Eş-Potansiyel Yüzeylere Diktir:




Potansiyeli $V$ olan bir eş-potansiyel yüzey olsun. Herhangi bir $q$ yükünü elektrik alan yardımıyla, yüzey üzerindeki bir yol boyunca $A$ noktasından $B$ noktasına götürelim. $\Delta\vec{r}$, yol üzerinde seçilmiş bir uzunluk elemanıdır.

Herhangi bir anda elektrik alan vektörü $\vec{E}$ ile $\Delta\vec{r}$ arasındaki açıya $\theta$ dersek, elektrik alan tarafından yapılan iş,

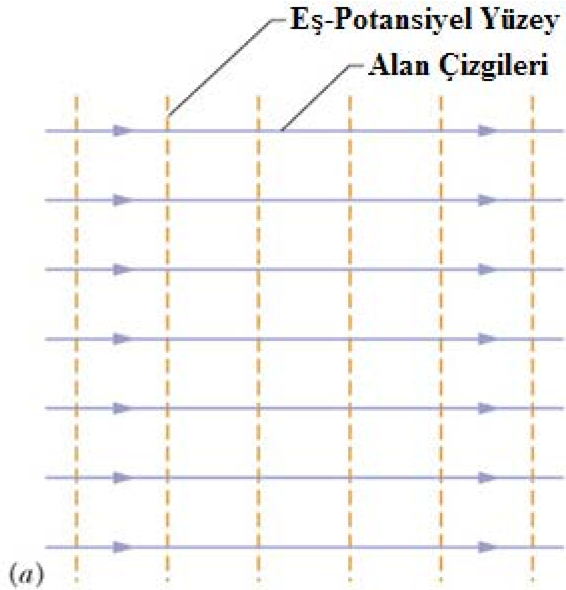



$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = q\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = qE\Delta r \cos\theta$$

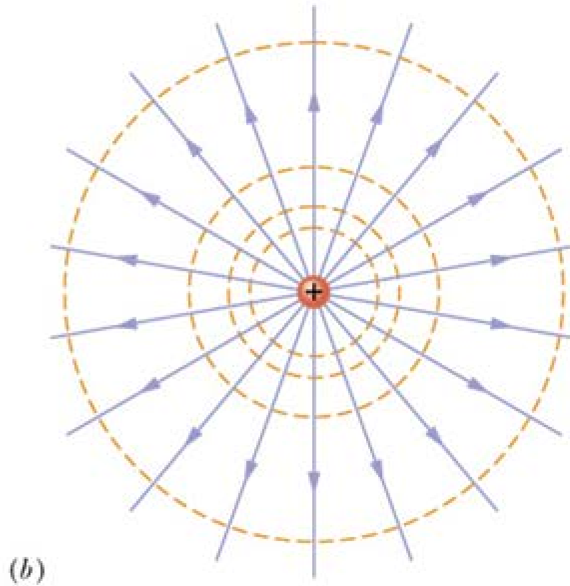
bulunur. $A$ ve $B$ noktaları eş-potansiyel bir yüzey üzerinde olduğu için, $W = 0$ ve böylece, $qE\Delta r \cos\theta = 0$ olmalıdır. Buradan da $\theta = 90°$, yani, elektrik alan eş-potansiyel yüzeye dik olmalıdır.

# Eş - Potansiyel Yüzeyler ve Elektrik alan Çizgileri :

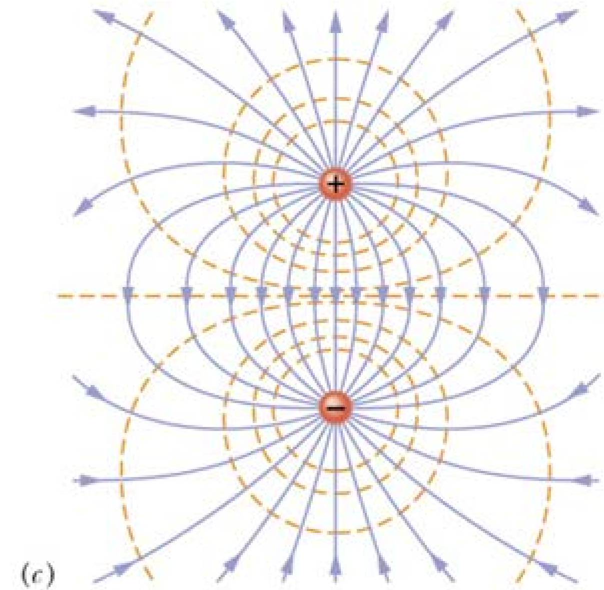
Düzgün Elektrik Alan




İzole Nokta Yük




Elektrik Dipol




## $q$ Nokta Yükü için Eş - Potansiyel Yüzeyler :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \text{sabit} \quad \rightarrow \quad r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V} = \text{sabit}$$

$q$ nokta yükünü merkez alan $r$ yarıçaplı küresel yüzeyler, eş-potansiyel yüzeylerdir.

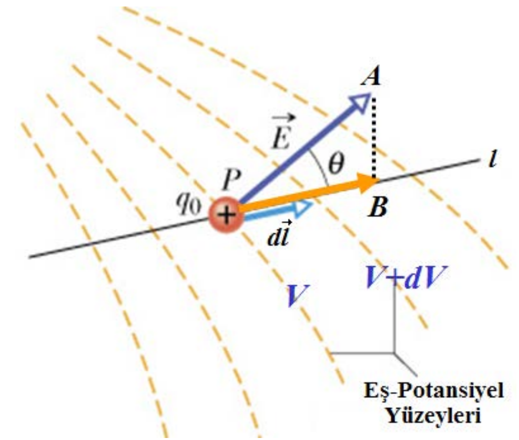
# Potansiyelden Elektrik Alanın Bulunması :

Şu ana kadar, elektrik alanını bildiğimizi kabul ederek elektrik potansiyelini bulduk. Şimdi de durumu tersine çevirelim. Elektrik potansiyeli bildiğimizi varsayıp, elektrik alanını bulacağız. Potansiyelleri sırasıyla $V$ ve $V + dV$ olan aralarında $dl$ mesafesi bulunan iki eş-potansiyel yüzey olsun. Elektrik alanı, $q_0$ nokta yükünü $d\vec{l}$ doğrultusu boyunca $V$ eş-potansiyel yüzeyinden $V + dV$ eş-potansiyel yüzeyine taşısın. Elektrik alan tarafından yapılan iş iki şekilde verilir:

$$W = -q_0 dV \qquad \text{(Eş-1)}$$

$$W = Fdl\cos\theta = Eq_0 dl\cos\theta \qquad \text{(Eş-2)}$$

$$Eq_0 dl\cos\theta = -q_0 dV \rightarrow E\cos\theta = -\frac{dV}{dl}$$




bulunur. $PAB$ dik üçgeninden $E\cos\theta$ teriminin, $\vec{E}$ elektrik alanının $l$ doğrultusundaki bileşeni olduğu görülür.

Böylece, $E_l = -\dfrac{\partial V}{\partial l}$ sonucuna ulaşılır. "Elektrik alanın herhangi bir yöndeki bileşeni, o yönde elektriksel potansiyelin konuma göre değişim hızının negatif işaretlisidir". Eğer $l$ doğrultusu sırasıyla, $x$ , $y$ ve $z$-ekseni alınırsa, elektrik alan bileşenleri:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Elektrik potansiyeli konumun bir fonksiyonu $V(x, y, z)$ ise, elektrik alan vektörünün x, y ve z bileşenleri bulunabilir ve birim vektörler cinsinden:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

şeklinde ifade edilebilir.

**Örnek :** Yarıçapı $R$ olan iletken bir kürenin potansiyeli

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{R} & , \quad r < R \\ \dfrac{kQ}{r} & , \quad r > R \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. İletken kürenin içinde ve dışındaki elektrik alanını bulunuz.

$$E_l = -\frac{dV}{dl}$$

$$r < R \rightarrow E_r = -\frac{d}{dr}\left(\frac{kQ}{R}\right) = 0$$

$$r > R \rightarrow E_r = -\frac{d}{dr}\left(\frac{kQ}{r}\right) = \frac{kQ}{r^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

**Örnek :** Uzayın belli bir bölgesindeki elektrik potansiyeli, $V(x,y,z) = 5x - 3x^2 y + 2yz^2$ (V) ile veriliyor. Bölgedeki elektrik alan bileşenlerini bulunuz. $(1,\ 0,\ -2)$ noktasındaki elektrik alan şiddetini hesaplayınız.

$$E_l = -\frac{dV}{dl} \rightarrow \left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{d}{dx}(5x - 3x^2 y + 2yz^2) = -5 + 6xy \\ E_y &= -\frac{d}{dy}(5x - 3x^2 y + 2yz^2) = 3x^2 - 2z^2 \\ E_z &= -\frac{d}{dz}(5x - 3x^2 y + 2yz^2) = -4yz \end{aligned}\right\}$$

$$(1,\ 0,\ -2) \rightarrow E_x = -5 \text{ V/m} \ ; \ E_y = 3 - 2*4 = -5 \text{ V/m} \ ; E_z = 0$$

$$E = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + (0)^2} = 25\sqrt{2} \text{ V/m}$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ olan ve düzgün $\sigma$ yüzey yük yoğunluğuna sahip bir diskin, merkezinden dik olarak geçen $z$-ekseni üzerinde oluşturduğu potansiyel

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right]$$

ile verilmektedir. Diskin bu eksen üzerinde oluşturduğu elektrik alanını bulunuz.

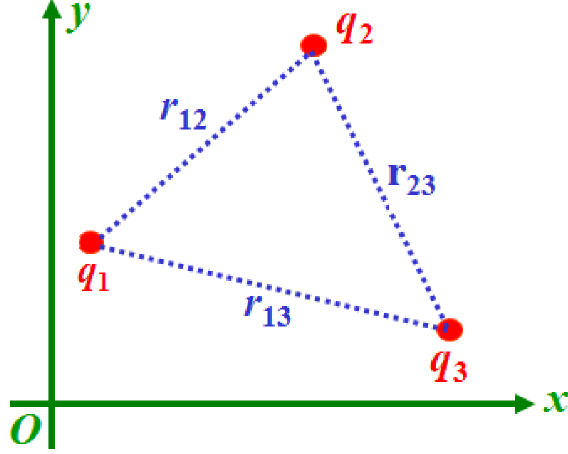
$$E_l = -\frac{dV}{dl} \rightarrow E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dz}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - z\right]$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}\left(z^2 + R^2\right)^{-1/2} 2z - 1\right]$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]$$

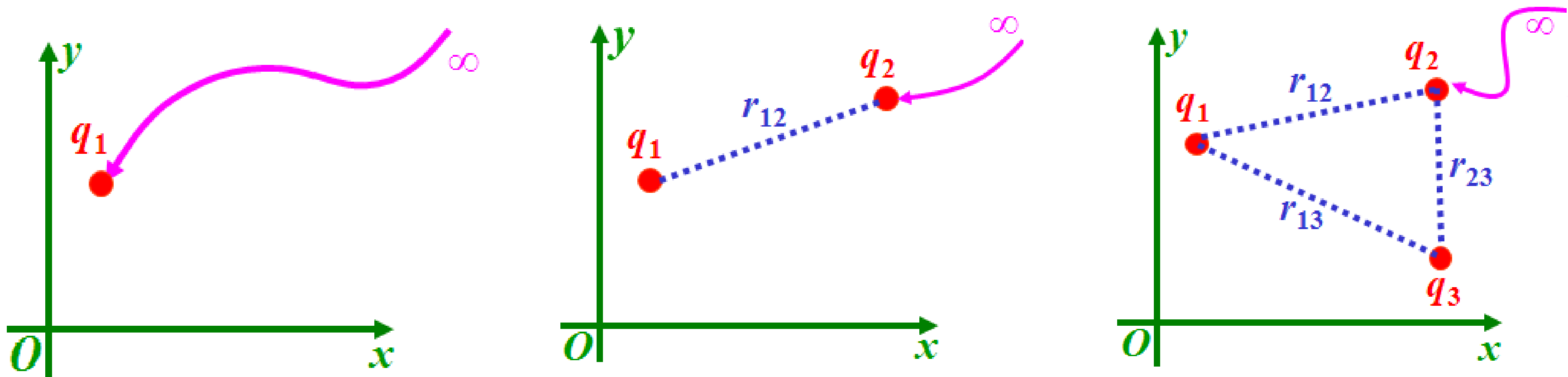
(24-31)

# Nokta Yük Sisteminin Potansiyel Enerjisi $(U)$:




Nokta yük grubunun elektrik potansiyel enerjisi $(U)$, tek tek tüm yüklerin sonsuzdaki bir noktadan alınıp bulundukları yere getirilmesi için yapılması gereken toplam iş olarak tanımlanır.

Herhangi bir $q$ yükünü aralarındaki potansiyel farkının $\Delta V$ olduğu iki nokta arasında, bir noktadan diğerine taşımak için yapılması gereken iş $W = q\Delta V$ ile verilir. Buna uygun olarak, nokta yük grubunu biraraya getirecek şekilde yükleri teker teker bulundukları noktalara getirerek yapılan işleri bulmamız ve net işi bulmak için de hepsini toplamamız gerekir.




$q_1$ in getirilmesi : $W_1 = q_1\left(\Delta V\right) = 0$

$q_2$ nin getirilmesi : $W_2 = q_2\left(V_{12} - 0\right) = \dfrac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$

$q_3$ ün getirilmesi : $W_3 = q_3\left(V_{13} + V_{23} - 0\right) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1 q_3}{r_{13}} + \dfrac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 \rightarrow W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}$$

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}$$

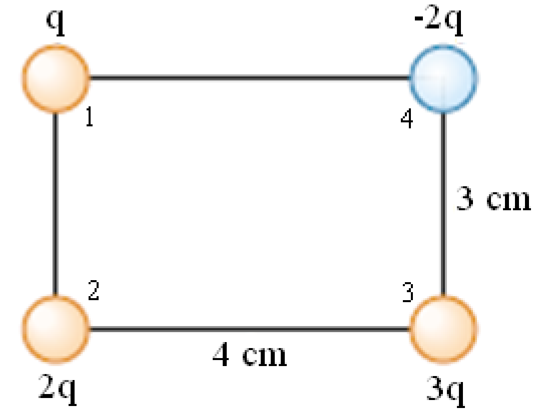
$n$ tane nokta yükten oluşan bir sistemin elektrik potansiyel enerjisini matematiksel olarak,

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

ifadesi ile verebiliriz. Bu ifadedeki $r_{ij}$, $q_i$ ve $q_j$ nokta yükleri arasındaki mesafedir.

**Not :** Her yük ikilisinin yalnızca bir defa yazılması gerektiğine dikkat ediniz. Bu nedenle, kesikli toplama işlemi yapılırken $i < j$ kısıtlaması getirilmiştir.

**Örnek :** Şekildeki dört noktasal yükü biraraya getirmek için gerekli işi hesaplayınız. ($q = 5.0\ \mu C$ alınız).



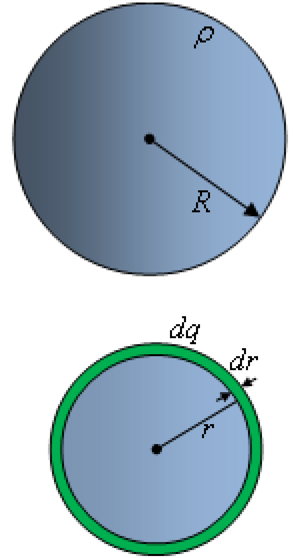

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_1 q_4}{r_{14}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k\frac{q_2 q_4}{r_{24}} + k\frac{q_3 q_4}{r_{34}}$$

$$U = \frac{kq^2}{10^{-2}}\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{2}{4} + \frac{6}{4} - \frac{4}{5} - \frac{6}{3}\right] = \frac{kq^2}{10^{-2}}\left[-\frac{4}{3} + 1 - \frac{1}{5}\right]$$

$$U = \frac{\left(9\times10^{9}\right)\left(5\times10^{-6}\right)^2}{10^{-2}}\left[1 - \frac{23}{15}\right] = 22.5\left(-\frac{8}{15}\right) = -12 \text{ J}$$

**Örnek :** Yarıçapı R olan ve düzgün $\rho$ hacimsel yük yoğunluğuna sahip bir kürenin toplam elektrik potansiyel enerjisini hesaplayınız.

Yükü sonsuzdan getirdiğimizi varsayalım. Herhangi bir anda kürenin yarıçapı $r$ ve yükü $q$ olmak üzere elektrik potansiyeli:

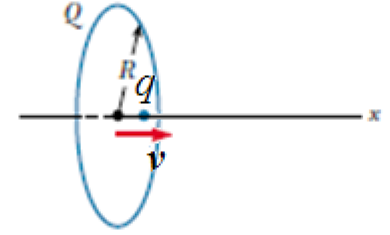



$$V = k\frac{q}{r}$$

ifadesine sahiptir. Kürenin yükünü $dq$ kadar artırmak için yapılması gereken iş $dU = dqV$ ile verilir. Küre içinde, $r$ yarıçaplı $dr$ kalınlığında ince bir küresel kabuk seçilirse, toplam iş:

$$U = \int dqV \rightarrow \left. \begin{array}{l} dq = \rho 4\pi r^2 dr \\ q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array} \right\} \rightarrow U = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ olan $Q$ homojen yüküne sahip bir halkanın merkezine, kütlesi $m$ olan bir $q$ nokta yükü yerleştirilmiştir. Halka ekseni boyunca, $q$ nokta yükü çok az bir miktar çekilip durgun halden serbest bırakılırsa, ulaşabileceği maksimum hız ne olur?




$q$ nokta yükünün bulunduğu ilk noktanın elektrik potansiyeli:

$$V_i = \oint k\frac{dq}{R} = \frac{kQ}{R}$$

ifadesine sahiptir. Sonsuzdaki bir noktanın potansiyeli de $V_\infty = 0$ olduğundan, $q$ nokta yükü üzerinde yapılan iş:

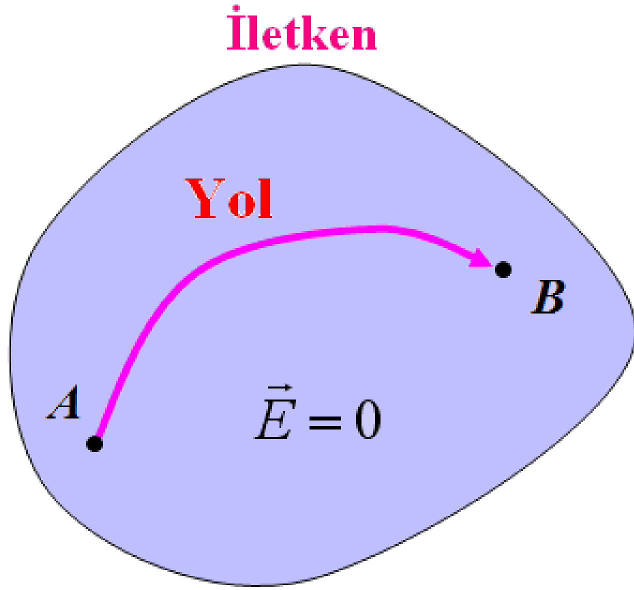
$$W = -\Delta U = -q(V_\infty - V) = \frac{kQq}{R}$$

bulunur. $W = \Delta K$ eşitliği yardımıyla:

$$\frac{kQq}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2kQq}{mR}}$$

bulunur.

# İzole bir İletkenin Potansiyeli :

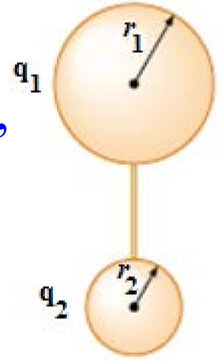



Bir iletkenin üzerindeki veya içerisindeki $A$ ve $B$ notalarını düşünelim. Bu noktalar arasındaki $V_B - V_A$ potansiyel farkı şu eşitlikle verilir:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Bir iletkenin içindeki elektrik alanının ($\vec{E}$) sıfır olduğunu biliyoruz. Dolayısı ile, yukarıdaki integral de sıfırdır ve $V_B = V_A$ bulunur. Özetle, "iletken eş-potansiyel bir yüzeydir".

**Örnek :** Yarıçapları $r_1$ ve $r_2$ olan iki iletken küre, yarıçaplarına göre, birbirinden çok uzaktadır. Daha sonra küreler, şekildeki gibi, iletken bir telle birbirine bağlanıyor. Küreler dengeye ulaştıktan sonra üzerlerindeki yükler sırasıyla $q_1$ ve $q_2$ oluyor. Dengeye ulaşıldıktan sonra, küre yüzeylerindeki elektrik alan şiddetlerinin oranını $(E_1/E_2)$ bulunuz.




Denge durumuna ulaşıldığında, kürelerin potansiyelleri aynı olur:

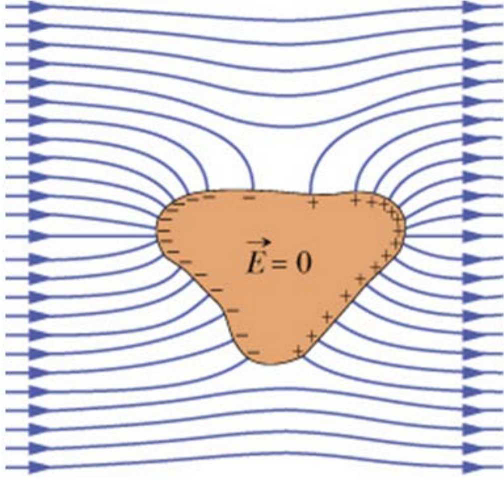
$$V_1 = V_2 \quad \rightarrow \quad k\frac{q_1}{r_1} = k\frac{q_2}{r_2}$$

Küre yüzeylerindeki elektrik alan şiddetlerinin oranı da:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= k\frac{q_1}{r_1^2} \\ E_2 &= k\frac{q_2}{r_2^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{r_2}{r_1}$$

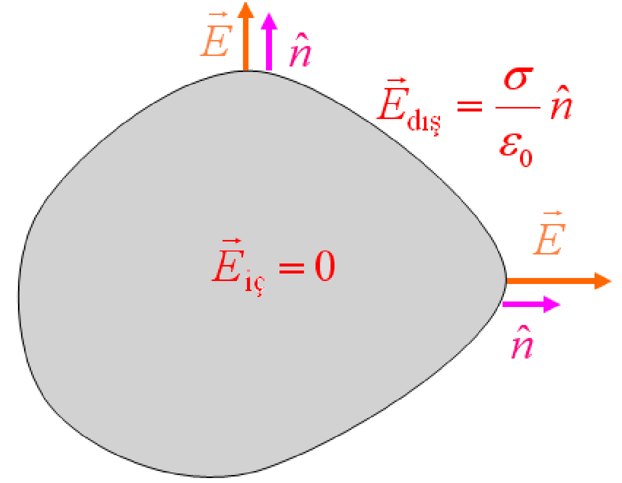
olur.

# Dış Elektrik Alan İçinde İzole İletken :




Bir iletkenin yüzeyinin eş-potansiyel olduğunu ve elektrik alan çizgilerinin de eş-potansiyel yüzeylere dik olduğunu biliyoruz. Yanda, elektrik alan içine konmuş bir iletken verilmiştir. Elektrik alan çizgilerinin iletken yüzeyine dik olduğu ve iletkenin içinde elektrik alanın sıfır olduğu açıkça görülmektedir. İletkendeki tüm yükler, iletken içindeki elektrik alanı sıfır yapacak yeni bir düzenlenme içerisine girerler. İletkenin hemen yüzeyindeki elektrik alan $E_{dış} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ile verilir.

# Yüklü Bir İletkenin İçinde ve Dışındaki Elektrik Alan ve Potansiyel (ÖZET) :



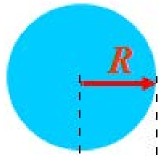

**1.** Tüm yük iletkenin yüzeyindedir.

**2.** İletkenin içinde elektrik alan sıfırdır: $E_{\text{iç}} = 0$.

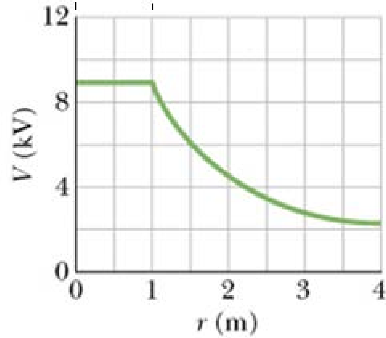
**3.** İletkenin hemen dışındaki elektrik alan: $E_{\text{dış}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

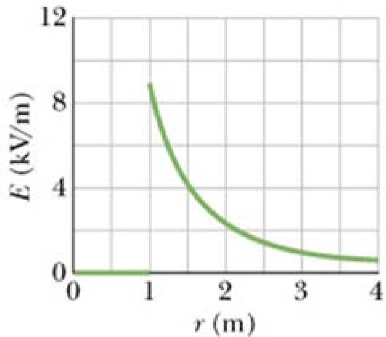
**4.** İletkenin hemen dışındaki elektrik alan iletken yüzeyine diktir.

**5.** İletkenin içinde ve yüzeyindeki tüm noktalar aynı potansiyele sahiptir. İletken eş-potansiyel bir yüzeydir.




# Yarıçapı R, Yükü $q$ Olan Küresel İletkenin Elektrik alanı ve Potansiyeli :




$$r < R \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

$$E = 0$$

$$r > R \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

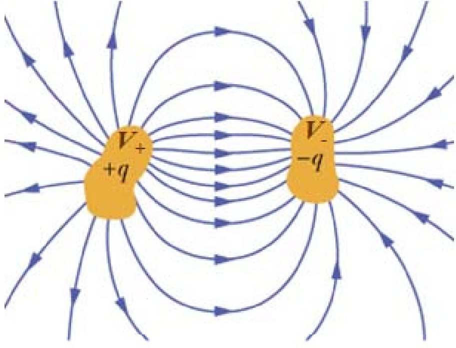
# BÖLÜM-25
# Kapasitörler

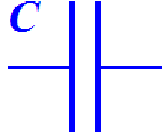


Bu bölümde aşağıdaki konulara değinilecektir:

- **İzole iki iletkenden oluşan sistemin sığası (*C*).**
- **Basit geometrilere sahip bazı kapasitörlerin sığalarının hesabı.**
- **Seri ve paralel bağlı kapasitörlerde eşdeğer sığa.**
- **Kapasitörde depolanan enerji.**
- **Plakaları arası dielektrikle doldurulmuş kapasitörler.**
- **Dielektriğin varlığında Gauss yasası.**

## Sığa (Kapasitans):



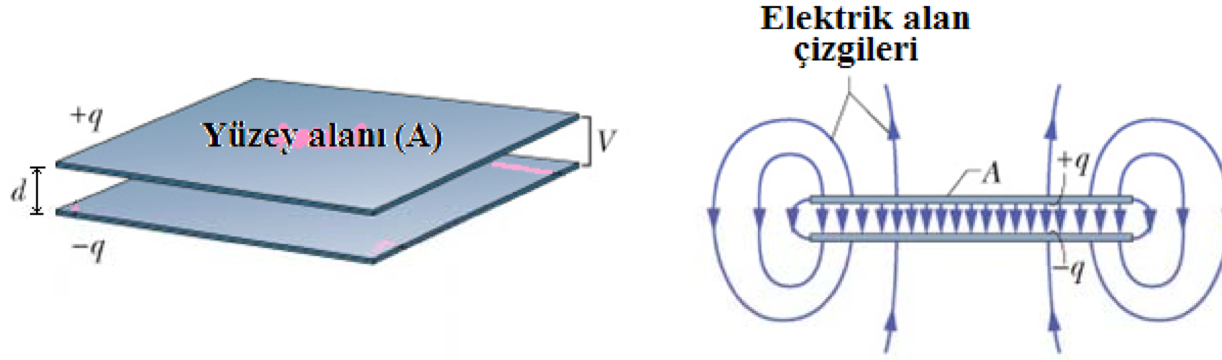




Birisi $+q$ ve diğeri de $-q$ yüküne sahip, aralarında hava ya da boşluk bulunan iki izole iletkenden oluşan sisteme "kapasitör" denir. Elektrik devrelerdeki sembolik gösterimi, iletken plakaları temsil eden paralel iki çizgidir. Bir kapasitörün yükü denilince, plakalardaki yükün mutlak değeri anlaşılır. Şekilde görüldüğü gibi, plakalarındaki yükten dolayı kapasitörü çevreleyen uzayda

bir elektrik alan oluşur. Pozitif ve negatif yüklü plakaların potansiyelleri, sırasıyla, $V_+$ ve $V_-$ ' dir. Böylece, plakalar arasındaki potansiyel farkı da $V = \Delta V = V_+ - V_-$ ifadesiyle verilir. Bir kapasitörün yükü ($q$), plakaları arasındaki potansiyel fark ($V$) ile doğru orantılıdır. Orantı sabiti de, o kapasitörün sığasıdır ve birim potansiyel fark başına yük olarak tarif edilir.

$C = \frac{q}{V}$ C/V ≡ Farad (F)

# Paralel Plakalı Kapasitör :




Plakalarının yüzey alanı $A$ ve aralarında $d$ mesafesi bulunan iki paralel plakadan oluşan sisteme "paralel plakalı kapasitör" denir. Plakaların boyutları, plakalar arası mesafeye göre çok büyüktür. Bu nedenle, plakalar arasındaki bölgede elektrik alan düzgün, kenar kısımlarına yakın bölgelerde ise düzgün değildir. Plakaların dışındaki bölgelerde elektrik alan "sıfır" dır.

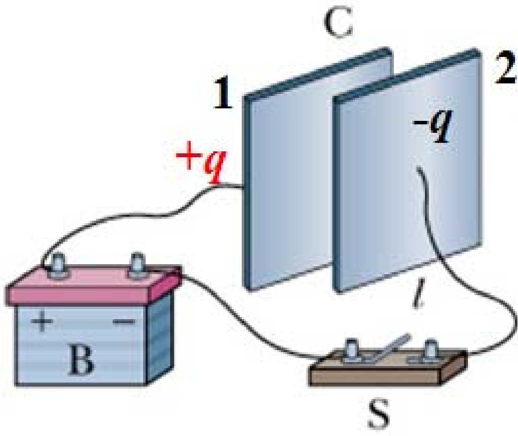
## Bataryalar :

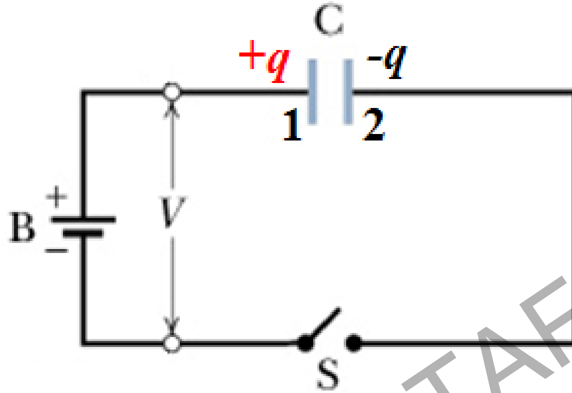
V

\+ −

İki ucu arasında sabit bir potansiyel fark oluşturan ve bunu sürekli kılan cihazlara "batarya" diyoruz. Elektrik devrelerinde biri uzun diğeri kısa iki paralel çizgi ile sembolize edilirler. Uzun çizgi potansiyelin pozitif olduğu ucu, kısa çizgi de potansiyelin negatif olduğu ucu gösterir.

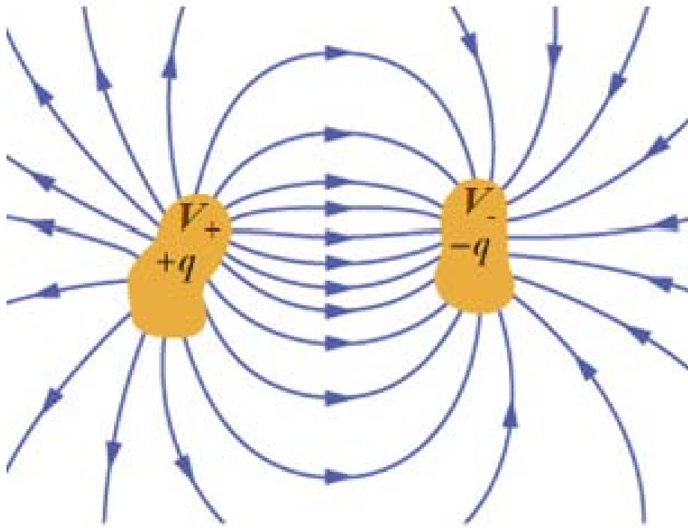
# Kapasitörün Yüklenmesi :




Yanda bir kapasitörün doldurulması için basit bir devre kurulmuştur. S anahtarı kapatıldığında, batarya negatif ucundan kapasitörün "2" nolu plakasına elektron sürer. Bataryanın pozitif ucu da, "1" nolu plakadan eşit sayıda elektronu toplar. Böylece, plakalardaki yük ve plakalar arasında başlangıçta sıfır olan potansiyel fark artmaya başlar. Sonuç olarak, bataryanın birim zamanda topladığı ve sürdüğü yük azalır. Yük akışı, kapasitörün plakaları arasındaki potansiyel fark bataryanın uçları arasındaki potansiyel farka eşit olana kadar devam eder ve sonra durur.

# Sığanın Hesaplanması :




Bir kapasitörün sığası, plakalarının boyutlarına, şekline ve birbirlerine göre konumlarına, özetle geometrisine, bağlıdır. Sığa hesabı için aşağıda sıralanan yol izlenir:

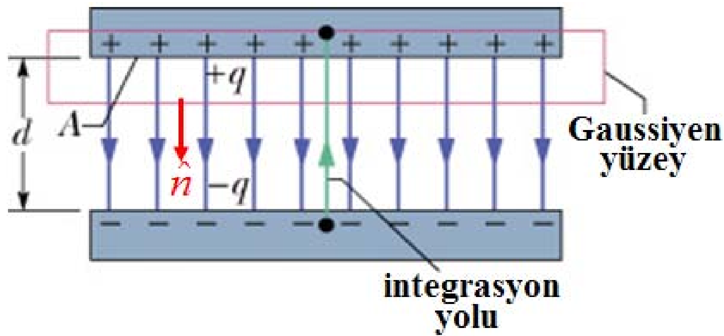
**1.** Plakaların $+q$ ve $-q$ yüklü oldukları varsayılır.

**2.** Plakalar arası bölgedeki elektrik alan Gauss yasasından bulunur $\left(\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{iç}}\right)$.

**3.** Plakalar arasındaki potansiyel fark, $V = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ eşitliği kullanılarak hesaplanır.

**4.** Hesaplanan potansiyel fark, $C = \dfrac{q}{V}$ eşitliğinde yerine konur ve sığa bulunur.

# Paralel Plakalı Kapasitörün Sığası :




Şekildeki plakaların yüzey alanı $A$ ve aralarındaki mesafe $d$ olsun. Üstteki plakanın yükü $+q$, alttaki plakanın yükü ise $-q'$ dur. Plaka ile aynı kesit alanına sahip ve plakayı ortasına alan dikdörgen prizma şeklinde bir Gaussiyen yüzey seçelim.

Gauss yasasını uygularsak, plakalar arasındaki bölgedeki elektrik alanı:

$$\Phi = EA\cos 0 = EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{A\varepsilon_0}$$

bulunur. Buradan da, iki plaka arasındaki potansiyel fark için,

$$V = -\int_{-}^{+} Edl\cos 180 = E\int_{-}^{+} dl = Ed = \frac{qd}{A\varepsilon_0}$$

bağıntısı elde edilir. Dolayısıyla, paralel plakalı bir kapasitörün sığası:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{qd/A\varepsilon_0} \rightarrow C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

olarak bulunur.

**Örnek :** Plakaları arası hava dolu olan paralel plakalı bir kapasitörün plakalarının alanı 7.6 cm$^2$' dir ve aralarında 1.25 mm mesafe vardır. Plakalar arasındaki potansiyel fark 20 V ise,

*a*–) plakalar arası bölgedeki elektrik alanını

*b*–) plakalardaki yüzey yük yoğunluğunu

*c*–) kapasitörün sığasını ve plakalardaki yük miktarını

bulunuz.

$$a\text{–)}\ V = Ed \rightarrow E = \frac{V}{d} = \frac{20}{1.25\times10^{-3}} = 16\times10^{3}\ \mathrm{V/m}$$

$$b\text{–)}\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma = \varepsilon_0 E = \left(8.85\times10^{-12}\right)*\left(16\times10^{3}\right) = 1.416\times10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$c\text{–)}\ C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\left(8.85\times10^{-12}\right)*\left(7.6\times10^{-4}\right)}{1.25\times10^{-3}} = 5.381\times10^{-12}\ \mathrm{F}$$

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow Q = CV = \left(5.381\times10^{-12}\right)20 = 107.62\times10^{-12}\ \mathrm{C}$$

**Örnek :** Plakaları arası hava dolu olan paralel plakalı bir kapasitörün plakaları arasına 150 V' luk potansiyel fark uygulandığında, plakalardaki yüzeysel yük yoğunluğu 30 $nC/cm^2$ oluyor.

*a*–) Kapasitörün plakaları arasındaki mesafe nedir?

*b*–) Plakaların yüzey alanı 4 $cm^2$ ise, kapasitörün sığasını ve plakalardaki yük miktarını bulunuz.

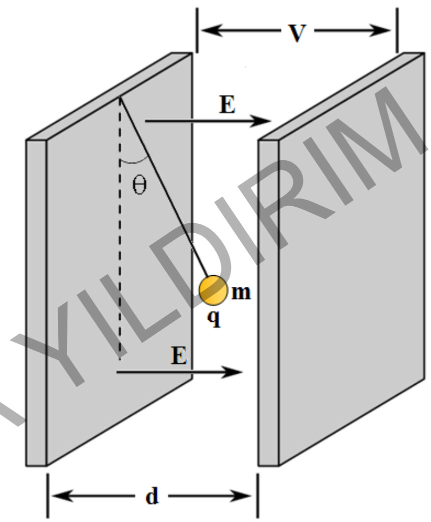
$$a\text{–)}\ V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$d = \frac{\varepsilon_0 V}{\sigma} = \frac{\left(8.85\times10^{-12}\right)150}{\left(30\times10^{-9}/10^{-4}\right)} = 4.425\times10^{-6}\ \text{m}$$

$$b\text{–)}\ C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\left(8.85\times10^{-12}\right)*\left(4\times10^{-4}\right)}{4.425\times10^{-6}} = 8\times10^{-10}\ \text{F}$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \rightarrow Q = \sigma A = \left(\frac{30\times10^{-9}}{10^{-4}}\right)*\left(4\times10^{-4}\right) = 120\times10^{-9}\ \text{C}$$

**Örnek :** Ağırlıksız bir iple paralel plakalı kapasitörün pozitif plakasına bağlı olan $m$ kütleli bir $q$ nokta yükü şekildeki gibi dengededir. Plakalar arasındaki potansiyel farkını bulunuz. Plakalardaki yük miktarı $Q$ ise, kapasitörün sığası ne olur?



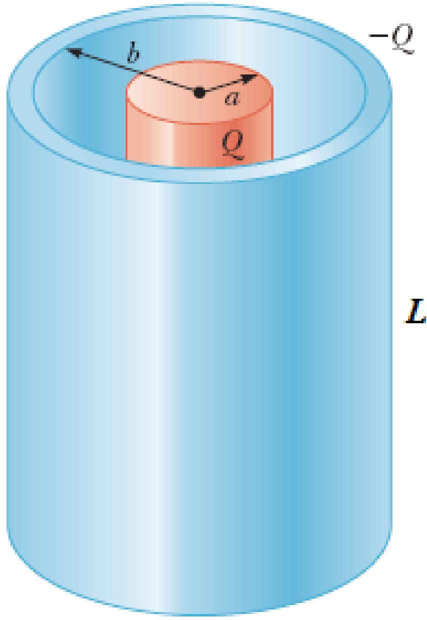

$$V = Ed$$

Denge durumunda, $q$ nokta yükü üzerine etkiyen net kuvvet sıfır olmalıdır:

$$\left.\begin{aligned} T\sin\theta &= qE \\ T\cos\theta &= mg \end{aligned}\right\} \rightarrow \tan\theta = \frac{qE}{mg} \rightarrow V = \frac{mg\tan\theta}{q}d$$

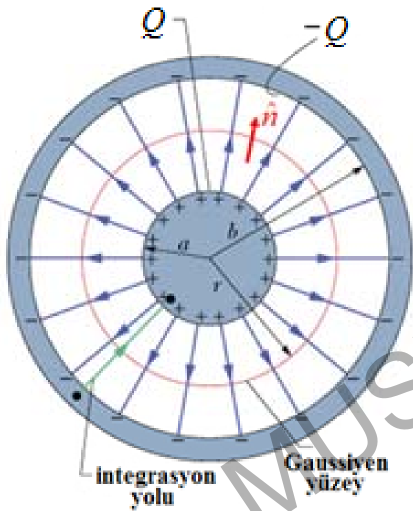
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Qq}{mgd\tan\theta}$$

# Silindirik Kapasitör :




Aynı $L$ uzunluğuna sahip, $a$ ve $b$ yarıçaplı eş-eksenli iki silindirik kabuktan oluşan sisteme "silindirik kapasitör" diyoruz. Silindirlerin boyu yarıçaplarının yanında çok büyüktür. Silindirlerle aynı uzunluğa sahip, $r$ $(a < r < b)$ yarıçaplı silindirik bir Gaussiyen yüzey seçerek, ara bölgedeki elektrik alanını bulabiliriz:

$$\Phi = 2\pi rLE\cos 0 = 2\pi rLE = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi rL}$$




Bu durumda, içteki ve dıştaki silindirler arasındaki potansiyel fark:

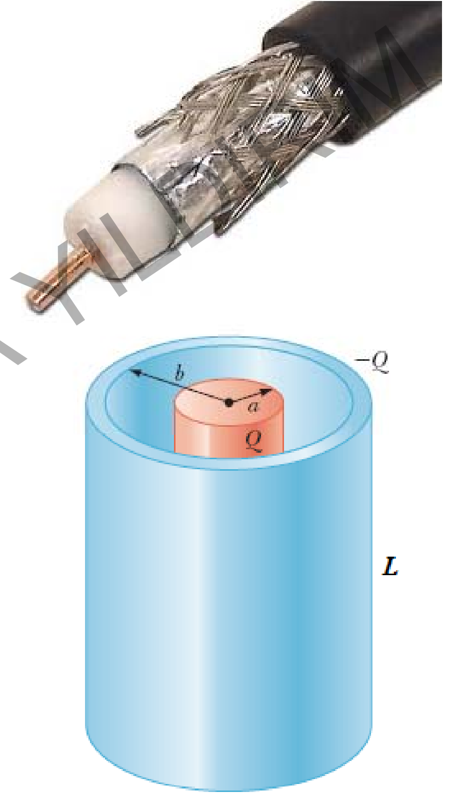
$$V = -\int_{-}^{+} Edl\cos 180 = -\int_{-}^{+} E(-dr)\cos 180 = -\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi L}\int_{b}^{a}\frac{dr}{r}$$

$$= -\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi L}\left[\ln r\right]_b^a = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

bulunur ve buradan da sığa: $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{Q}{\left(Q/2\pi L\varepsilon_0\right)\ln\left(b/a\right)}$

$$C = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln\left(b/a\right)}$$

**Örnek :** Uzunluğu 50 m olan koaksiyel bir kablolonun iç iletkenin yarıçapı 1.3 mm ve taşıdığı yük 8 $\mu$C' tur. Dış iletkeninin ise iç yarıçapı 3.8 mm ve yükü $-8$ $\mu$C' tur. İki iletkenin arasındaki bölgenin hava ile dolu olduğunu kabul ederek, kablonun kapasitansını ve iletkenleri arasındaki potansiyel farkını bulunuz.

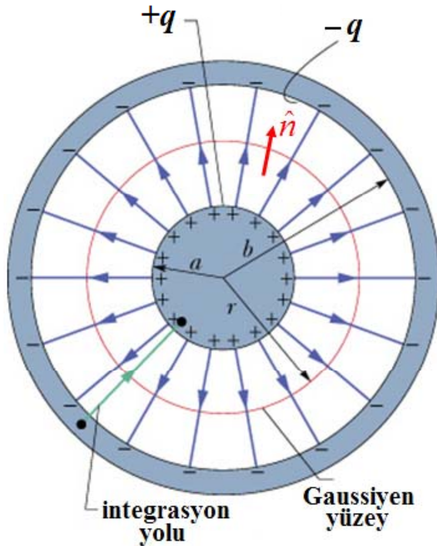



$$C = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln\left(b/a\right)}$$

$$C = \frac{2(3.14)(50)(8.85\times10^{-12})}{\ln(3.8/1.3)} = 2.591\times10^{-9}\ \text{F}$$

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow V = \frac{Q}{C} = \frac{8\times10^{-6}}{2.591\times10^{-9}} = 3.09\times10^{3}\ \text{V}$$

# Küresel Kapasitör :




Yarıçapları $a$ ve $b$ olan eş-merkezli iki küresel kabuktan oluşan sisteme "küresel kapasitör" denir. $a < r < b$ olacak şekilde küresel bir Gaussiyen yüzey seçerek, ara bölgedeki elektrik alanını bulabiliriz:

$$\Phi = 4\pi r^2 E\cos 0 = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Bu durumda, içteki ve dıştaki küreler arasındaki potansiyel fark:

$$V = -\int_{-}^{+} Edl\cos 180 = -\int_{-}^{+} E(-dr)\cos 180 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{b}^{a}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

bulunur ve buradan da sığa: $C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{q}{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)} \rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$

**Örnek :** Küresel bir kapasitör, yarıçapları 7 cm ve 14 cm olan eş-merkezli iki iletken küreden oluşmuştur. Kapasitörün sığasını hesaplayınız. Kürelerin taşıdığı yük 4 $\mu$C ise, küreler arasındaki potansiyel farkını bulunuz.

Küresel bir kapasitörün sığası:

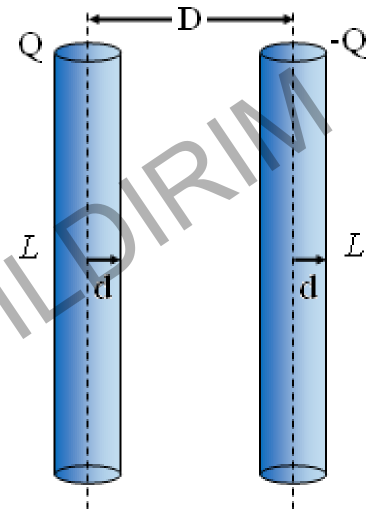
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left( \frac{ab}{b-a} \right)$$

ifadesine sahiptir. $a = 7$ cm ve $b = 14$ cm olduğuna göre,

$$C = 4(3.14)(8.85\times10^{-12})\frac{(7\times14)\times10^{-4}}{(14-7)\times10^{-2}} = 15.56\times10^{-12}\ \text{F}$$

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow V = \frac{Q}{C} = \frac{4\times10^{-6}}{15.56\times10^{-12}} = 2.57\times10^{5}\ \text{V}$$

**Örnek :** Yarıçapı d olan çok uzun iki silindir, şekilde gösterildiği gibi birbirlerine paraleldir ve eksenleri arasındaki mesafe $D'$ dir. Silindirler zıt işaretli $Q$ yükleri taşıdığına göre, iki silindirden oluşan bu sistemin birim uzunluğunun sığası ne olur? $(L \gg D, \mathrm{d})$.




Gauss yasası kullanılarak, silindirlerin bulunduğu düzlemde ve silindirler arasındaki bölgede elektrik alan:

$$E = \frac{2kQ}{Lr} + \frac{2kQ}{L(D-r)} \quad \text{(pozitif yükten negatif yüke doğru)}$$

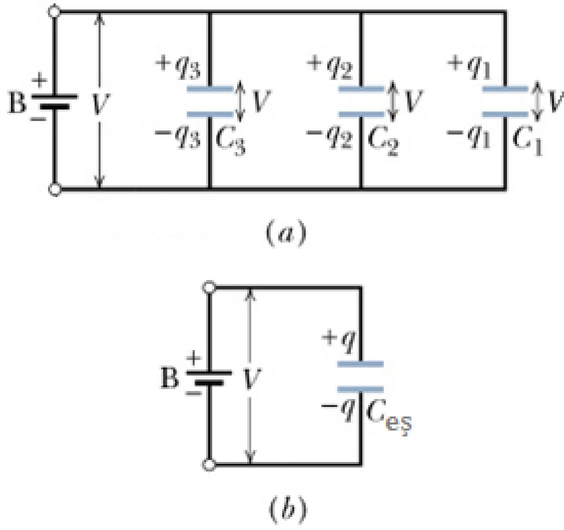
bulunur. Burada $r$, negatif yüklü silindir ekseninden olan uzaklıktır.

$$V = V_+ - V_- = -\int_d^{D-d} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{2kQ}{L}\int_d^{D-d}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{D-r}\right)dr\cos 180$$

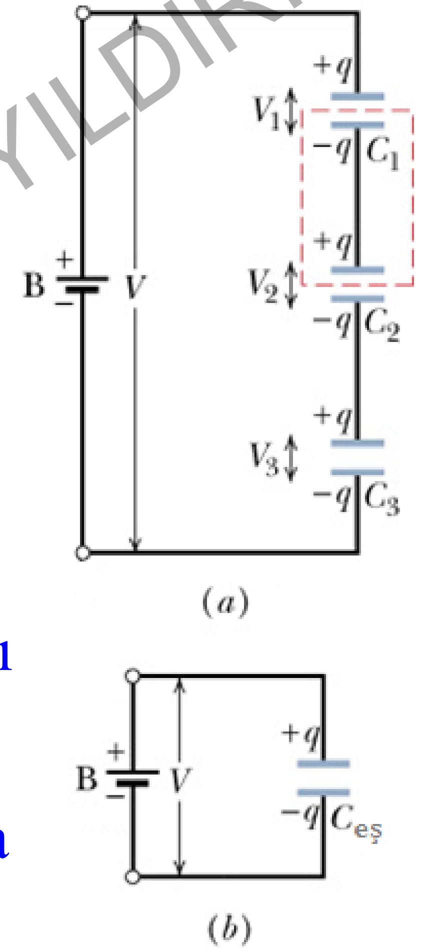
$$V = \frac{2kQ}{L}\left[\ln\left(\frac{D-d}{d}\right) - \ln\left(\frac{d}{D-d}\right)\right] = \frac{4kQ}{L}\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{L}{4k\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)} \rightarrow \frac{C}{L} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}$$

# Eşdeğer Kapasitör :

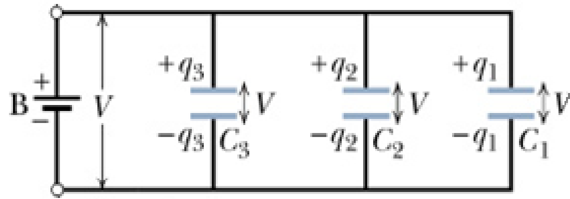



Sayfanın her iki yanında, bir batarya ve üç farklı kapasitörden oluşmuş devreler verilmiştir. Amacımız, her iki devrede de tüm kapasitörleri temsil edebilecek tek bir kapasitörün sığasının $\left(C_{eş}\right)$ ne olması gerektiğini bulmak.

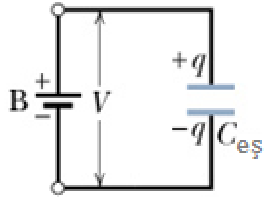



Soldaki resimde (Şekil-*a* ve *b*), uyguladığımız $V$ potansiyel farkı nedeniyle, bataryanın devreye sürdüğü yük miktarı aynıdır. Aynı durum sağdaki resim için de geçerlidir. Başka deyişle, şekil-*a*' da verilen sığaları $(C_1, C_2, C_3)$ ve şekil-*b*' deki sığayı $(C_{eş})$ ayrı ayrı kapalı kutulara alsak ve birtakım elektriksel ölçümler yapsak, ölçümler arasında bir fark bulamazdık.

# Paralel Bağlı Kapasitörler :



(a)



(b)

Şekil-*a*' da bir batarya ve birbirine paralel bağlı üç farklı kapasitörden oluşan bir devre verilmiştir. Paralel bağlı olmaları, herbirinin uçları arasındaki potansiyel fark ile bataryanın uçları arasındaki potansiyel farkın eşit olduğu anlamına gelir. Şekil-*b*' deki gibi, batarya aynı kalmak koşuluyla, birbirine paralel bağlı bu üç kapasitöre eşdeğer tek bir kapasitör bağlamak istiyoruz.

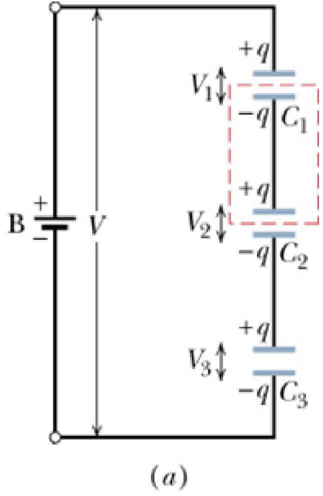
Her üç kapasitörün plakaları arasında **aynı *V* potansiyel farkı** vardır. Her biri üzerindeki yük, sırasıyla, $q_1 = C_1V$ ; $q_2 = C_2V$ ve $q_3 = C_3V$ olacaktır. Bu durumda, batarya tarafından devreye sürülen toplam yük ve eşdeğer sığa:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V \rightarrow C_{eş} = \frac{q}{V} = \frac{(C_1 + C_2 + C_3)V}{V} = C_1 + C_2 + C_3$$

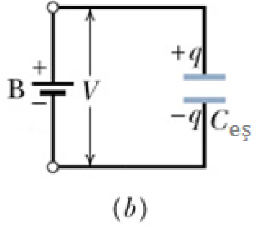
bulunur. Özetle, birbirine paralel bağlı *n* tane kapasitörden oluşan devrenin eşdeğer sığası:

$$C_{eş} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

# Seri Bağlı Kapasitörler :



(a)



(b)

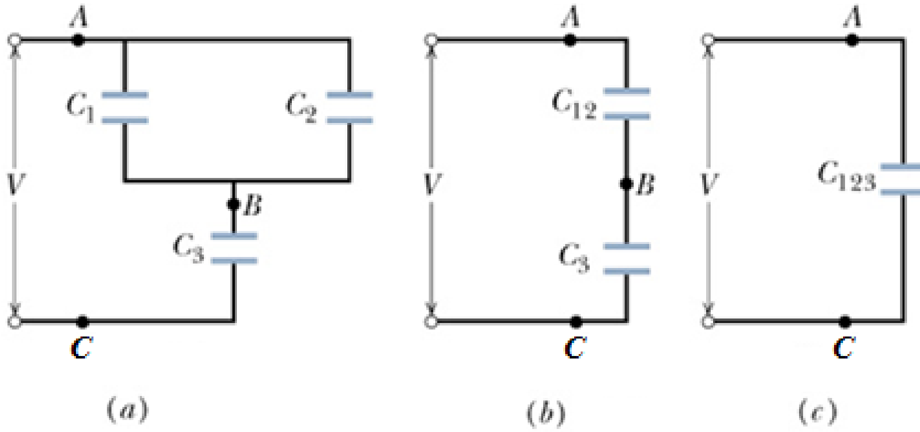
Şekil-*a*' da bir batarya ve birbirine seri bağlı üç farklı kapasitörden oluşan bir devre verilmiştir. Bu, kapasitörlerin aynı hat üzerinde ard arda sıralandığı anlamına gelmektedir. Bu kombinasyonun iki ucuna bir batarya ile $V$ gerilimi uygulanmıştır. Şekil-*b*' deki gibi, batarya aynı kalmak koşuluyla, birbirine seri bağlı bu üç kapasitöre eşdeğer tek bir kapasitör bağlamak istiyoruz.

Aynı hat üzerinde oldukları için her üç kapasitör de **aynı *q* yüküne** sahip olacaktır. Böylece kapasitörlerin uçları arasındaki gerilimler, sırasıyla, $V_1 = q / C_1$, $V_2 = q / C_2$ ve $V_3 = q / C_3$ olacaktır. Kombinasyonun iki ucu arasındaki toplam potansiyel fark ve eşdeğer sığa:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \rightarrow C_{eş} = \frac{q}{V} \rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Özetle, birbirine paralel bağlı $n$ tane kapasitörden oluşan devrenin eşdeğer sığası:

$$\frac{1}{C_{eş}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$




Genellikle, kapasitörlerden oluşan bir devre kendi içlerinde paralel ve seri bağlı küçük alt gruplar içerir. Böyle durumlarda, önce alt grupların eşdeğer sığaları bulunur ve sonra da ana gruba geçilir.

Yukarıda basit bir devre verilmiştir. *A* ve *C* uçları arasındaki eşdeğer sığayı bulmak isteyelim:

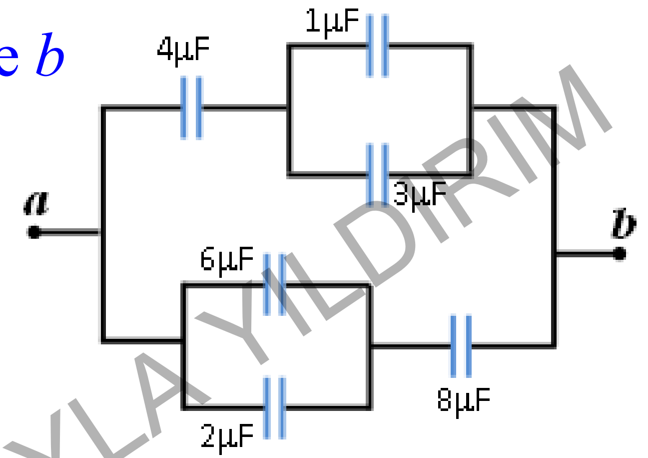
$C_1$ ve $C_2$ paralel bağlıdır (şekil-*a*) $\rightarrow C_{12} = C_1 + C_2$

$C_{12}$ ve $C_3$ seri bağlıdır (şekil-*b*) $\rightarrow \dfrac{1}{C_{123}} = \dfrac{1}{C_{12}} + \dfrac{1}{C_3}$

$$C_{eş} = C_{123} = \frac{C_{12}C_3}{C_{12}+C_3} = \frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3}$$

sonucu elde edilir.

**Örnek :** Kapasitörlerden oluşan yandaki devrenin $a$ ve $b$ uşları arasındaki eşdeğer sığasını hesaplayınız.



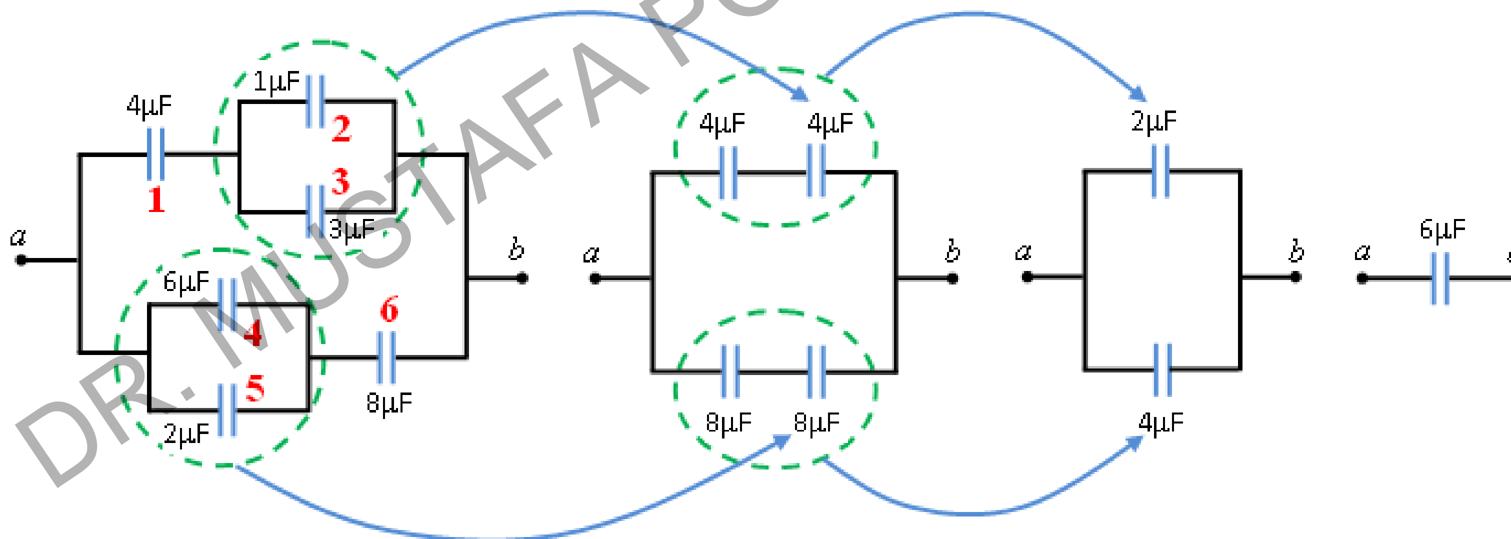

$C_2$ ile $C_3$ paralel $\rightarrow$ $C_{23} = 4\ \mu\text{F}.$

$C_4$ ile $C_5$ paralel $\rightarrow$ $C_{45} = 8\ \mu\text{F}.$

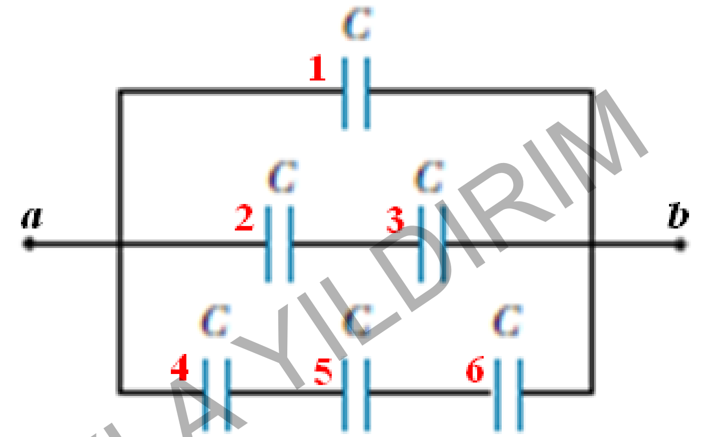
$C_1$ ile $C_{23}$ seri $\rightarrow$ $\dfrac{1}{C_{123}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow C_{123} = 2\ \mu\text{F}.$

$C_{45}$ ile $C_6$ seri $\rightarrow$ $\dfrac{1}{C_{456}} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4} \rightarrow C_{456} = 4\ \mu\text{F}.$

$C_{123}$ ile $C_{456}$ paralel $\rightarrow$ $C_{eş} = 6\ \mu\text{F}.$



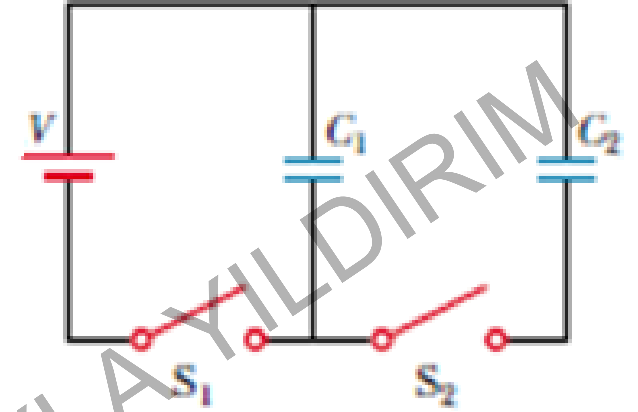
**Örnek :** Kapasitörlerden oluşan yandaki devrenin *a* ve *b* uşları arasındaki eşdeğer sığasını bulunuz.




$$C_4, C_5 \text{ ve } C_6 \text{ seri } \rightarrow \frac{1}{C_{456}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{C} \rightarrow C_{456} = \frac{C}{3}$$

$$C_2 \text{ ve } C_3 \text{ seri } \rightarrow \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \rightarrow C_{23} = \frac{C}{2}$$

$$C_1, C_{23} \text{ ve } C_{456} \text{ paralel } \rightarrow C_{eş} = C + \frac{C}{2} + \frac{C}{3} = \frac{11}{6}C$$



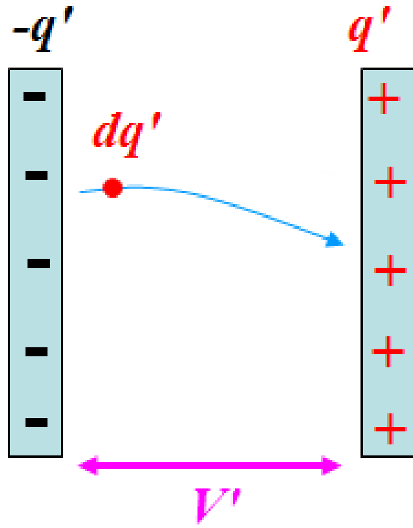

**Örnek :** Şekildeki devrede $C_1 = 6\ \mu\text{F}$, $C_2 = 3\ \mu\text{F}$ ve $V = 20$ V' tur. Önce $\text{S}_1$ anahtarı kapatılarak $C_1$ kapasitörü dolduruluyor. Daha sonra $\text{S}_1$ anahtarı açılıp, $\text{S}_2$ anahtarı kapatılıyor. $C_1$ sığasının ilk yükünü ve denge kurulduktan sonra sığaların yüklerini bulunuz.

$\text{S}_1$ anahtarı kapatılırsa: $C_1 = \dfrac{Q_0}{V} \rightarrow Q_0 = C_1 V = 120\ \mu C$

$\text{S}_1$ açılıp, $\text{S}_2$ kapatılırsa: $V_{C_1} = V_{C_2} \rightarrow \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_2}{C_2}$

$$\left.\begin{array}{l} Q_0 = Q_1 + Q_2 \\ \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_2}{C_2} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} Q_1 = 80\ \mu C \\ Q_2 = 40\ \mu C \end{array}$$

# Elektrik Alanda Depolanan Enerji :




Sığası $C$ olan bir kapasitörü yüklemek için yapılması gereken iş ne kadardır? Bunu hesaplamanın yolu da, dolan kapasitörün herhangi bir andaki resmini çekmektir. Plakaları arasındaki gerilimin $V'$ ve yükünün de $q'$ olduğu bir an düşünelim. Plakaların yükünü $dq'$ kadar artırmak için yapılması gereken iş,

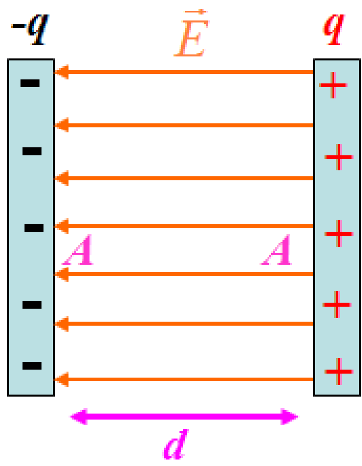
$$dW = dq'V' = \frac{q'}{C}dq'$$

ile verilir. Kapasitörü toplam $q$ yükü ile yüklemek için yapılması gereken toplam iş:

$$W = \int V'dq' = \frac{1}{C}\int_0^q q'dq' = W = \frac{1}{C}\left[\frac{q'^2}{2}\right]_0^q = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

bulunur.

$$q = CV \rightarrow W = \frac{1}{2}CV^2 \quad \text{veya} \quad W = \frac{1}{2}qV$$




## Kapasitörde Depolanan Potansiyel Enerji :

Kapasitörü yüklemek için harcadığımız enerji, kapasitörde potansiyel enerji olarak depolanmıştır:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{qV}{2}$$

Bu enerji, kapasitörün boşaltılmasıyla tekrar kazanılabilen bir enerjidir.

## Enerji Yoğunluğu :

Kapasitörün plakaları arasındaki bu bölgede $E = V/d$ ifadesi ile verilen düzgün bir elektrik alan olduğu düşünülürse, enerjinin bu elektrik alanda depolandığını söylemek yanlış olmaz. Başka deyimle, elektrik alan boş uzayda enerji depolar.

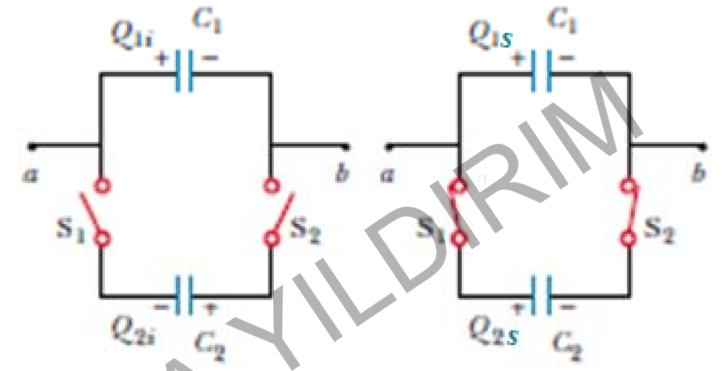
Enerji yoğunluğu ($u$), birim hacimdeki potansiyel enerji olarak tanımlanır: $u = \dfrac{U}{Hacim}$.

Paralel plakalı bir kapasitörün plakaları arasındaki bölgenin hacmi, $A$ plakaların yüzey alanı ve $d$ plakalar arasındaki mesafe olmak üzere $Hacim = Ad$ olduğundan:

$$u = \frac{U}{Hacim} = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad} = \left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)\frac{V^2}{2Ad} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2 \rightarrow u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

sonucuna ulaşılır. Bu genel bir bağıntıdır ve her durumda geçerlidir.

**Örnek :** Sığaları $C_1$ ve $C_2$ olan iki kapasitör, zıt kutuplu ve plakaları arasında aynı $V_i$ gerilimi olacak şekilde dolduruluyor. Daha sonra bu kapasitörler bataryadan sökülerek yandaki devre kuruluyor ve her iki anahtar da ($S_1$ ve $S_2$) aynı anda kapatılıyor.




$a-)$ $a$ ve $b$ noktaları arasındaki $V_s$ gerilim farkı ne olur?

$b-)$ Sistemin, anahtarlar kapatılmadan önce ve sonraki toplam enerjisini bulunuz. Sistemin son enerjisinin ilk enerjisine oranı nedir?

$$a-)\ \left.\begin{array}{l} Q_{1i}=C_1V_i \text{ ve } Q_{2i}=-C_2V_i \\ Q_{1s}=C_1V_s \text{ ve } Q_{2s}=C_2V_s \end{array}\right\} \rightarrow Q=Q_{1i}+Q_{2i}=Q_{1s}+Q_{2s}$$

$$\frac{Q_{1s}}{Q_{2s}}=\frac{C_1}{C_2}\rightarrow Q=Q_{1s}+Q_{2s}=\left(\frac{C_1}{C_2}+1\right)Q_{2s}\rightarrow Q_{2s}=\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)Q \text{ ve } Q_{1s}=\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)Q$$

$$V_s=\frac{Q_{1s}}{C_1}=\frac{Q}{C_1+C_2}=\frac{(C_1-C_2)}{(C_1+C_2)}V_i$$

$$b-)\ U_i=\frac{1}{2}(C_1+C_2)V_i^2 \quad \text{ve} \quad U_s=\frac{1}{2}(C_1+C_2)V_s^2=\frac{1}{2}\frac{(C_1-C_2)^2}{(C_1+C_2)}V_i^2$$

$$\frac{U_s}{U_i}=\frac{\frac{1}{2}\frac{(C_1-C_2)^2}{(C_1+C_2)}V_i^2}{\frac{1}{2}(C_1+C_2)V_i^2}=\left(\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}\right)^2$$

**Örnek :** Yükü $Q$ ve plaka alanı $A$ olan paralel plakalı bir kapasitörün plakaları arasındaki etkileşme kuvvetini bulunuz.

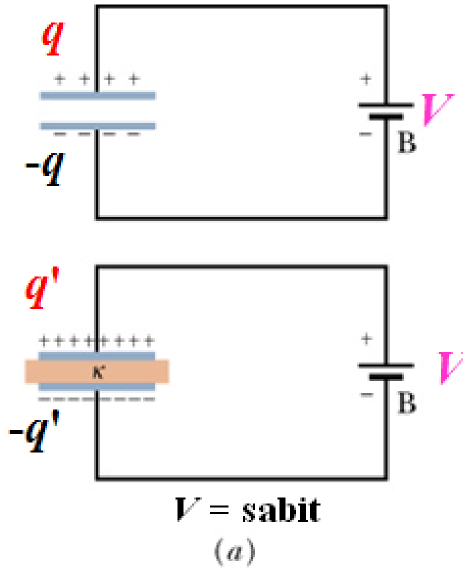
Herhangi bir anda plakalar arasındaki mesafe $x$ olsun. Plakalar arasındaki mesafenin $x+dx$ olması için yapılması gereken iş:

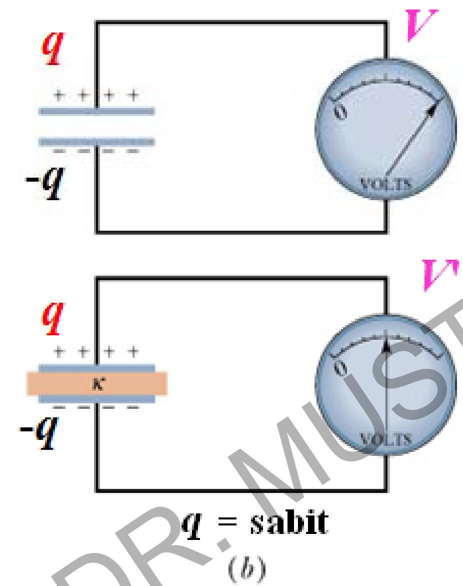
$$dW = -\Delta U = -\left[\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_i} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_s}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \frac{\varepsilon_0 A}{x} \\ C_s &= \frac{\varepsilon_0 A}{x+dx} \end{aligned}\right\} \rightarrow dW = -\frac{Q^2}{2}\left[\frac{x}{\varepsilon_0 A} - \frac{x+dx}{\varepsilon_0 A}\right] = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}dx$$

$$dW = Fdx \rightarrow F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

# Dielektriğin Varlığında Kapasitörler :



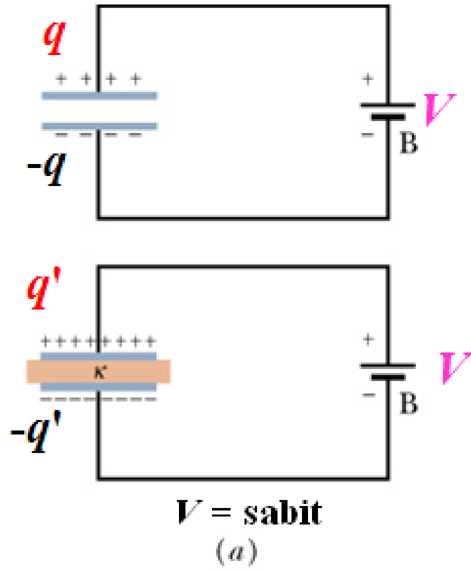




Michael Faraday 1837 yılında, kapasitörün plakaları arasındaki bölgeyi farklı yalıtkanlarla tamamen doldurarak, bunun sığaya olan etkisini incelemiştir. Yaptığı birçok denemeler sonucunda, yalıtkanla doldurulmuş kapasitörlerin sığası ile doldurulmadan önceki sığası ($C_{hava}$) arasında $C = \kappa C_{hava}$ eşitliği ile verilen bir ilişki olduğunu farketti. Burada $\kappa$ sabiti, plakalar arasına konan yalıtkan malzemenin dielektrik sabitidir ve birimsizdir. Hava ya da boşluk için $\kappa = 1$, bunun dışındaki yalıtkanlar için $\kappa > 1$' dir. Faraday deneylerini iki farklı şekilde yapmıştır:

**1.** Sabit bir gerilim altındayken (batarya bağlı iken), plakalar arasına yalıtkan bir malzeme yerleştirmiştir (Şekil-*a*).

**2.** Batarya bağlı değilken, plakalarındaki yük sabit iken, plakalar arasına yalıtkan malzeme yerleştirmiştir (Şekil-*b*).

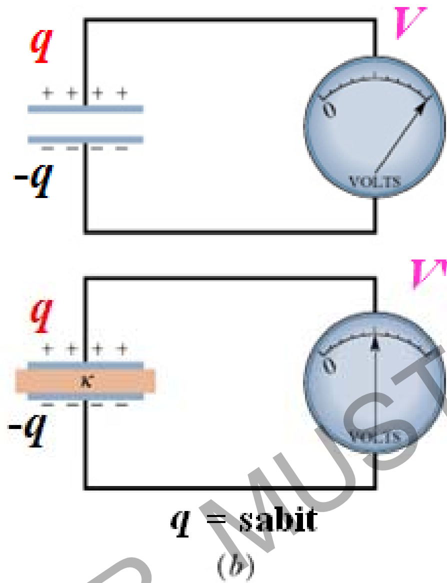
## Şekil - $a$ : Sabit $V$ Gerilimi Altındaki Sığa :




Plakalar arasında dielektrik malzeme yokken, plakalardaki yük $q$ ve plakalar arasındaki potansiyel fark $V$ olduğundan, kapasitörün sığası $C_{hava} = q / V$ ile verilir. Faraday, plakalar arasına dielektrik malzeme yerleştirdikten sonra, plakalardaki yükün $\kappa$ çarpanı kadar arttığını gözlemiştir $(q' = \kappa q)$.

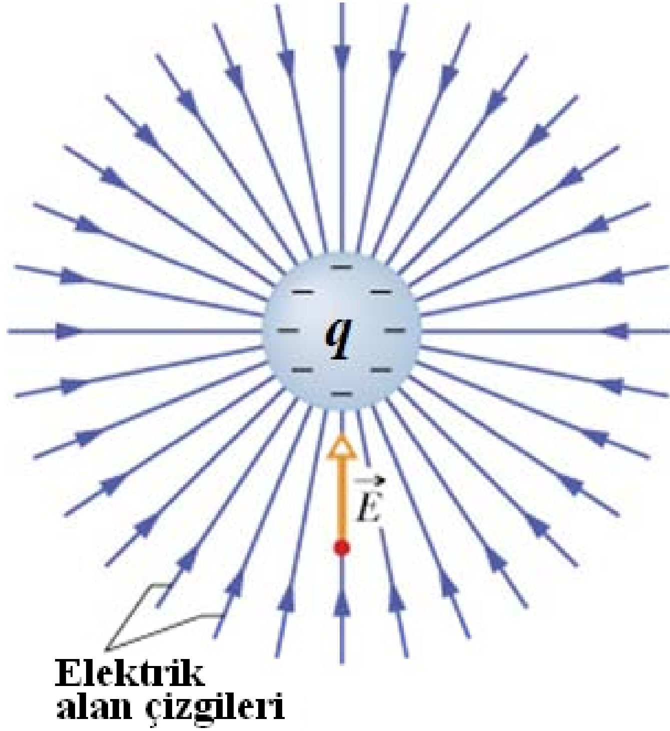
Bu yeni durumdaki sığa: $C = \dfrac{q'}{V} = \dfrac{\kappa q}{V} = \kappa \dfrac{q}{V} = \kappa C_{hava}$

## Şekil - $b$ : $q$ Yükünün Sabit Olduğu Durumda Sığa :




Faraday, bataryadan izole edilimiş yükü sabit olan kapasitörün plakaları arasına dielektrik bir malzeme yerleştirdikten sonra, plakalar arasındaki potansiyel farkın $1/\kappa$ oranında azaldığını gözlemiştir $(V' = V / \kappa)$.

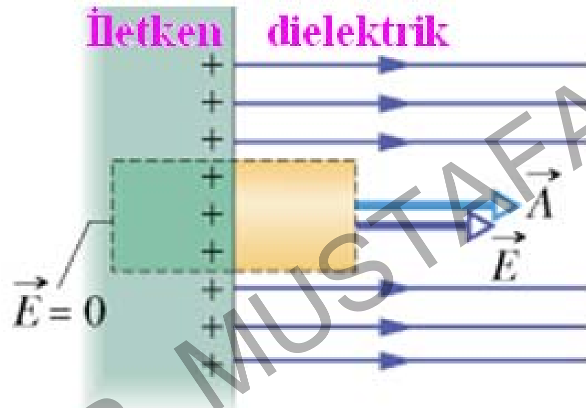
Bu yeni durumdaki sığa: $C = \dfrac{q}{V'} = \dfrac{q}{V / \kappa} = \kappa \dfrac{q}{V} = \kappa C_{hava}$




Bir bölge, dielektrik sabiti $\kappa$ olan yalıtkan bir malzeme ile tamamen kaplanmışsa, $\varepsilon_0$ terimini içeren bütün elektrostatik eşitliklerde $\varepsilon_0$ yerine $\kappa\varepsilon_0$ yazılmalıdır.

Örneğin, dielektrik bir ortamda nokta yükün elektrik alan ifadesi:

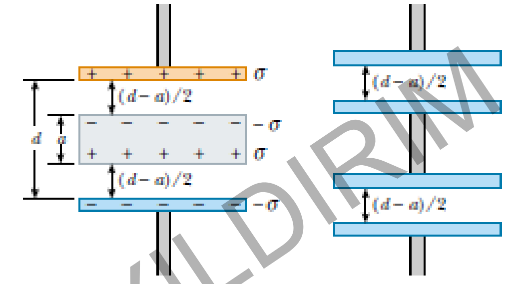
$$E = \frac{1}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$




Dielektrik bir ortamda izele bir iletkenin dışındaki elektrik alan ifadesi:

$$E = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0}.$$

**Örnek :** Plaka alanı $A$ ve plakaları arası uzaklığı $d$ olan paralel plakalı bir kapasitörün tam ortasına, plakalarla aynı yüzey alanına sahip, kalınlığı $a$ olan yüksüz metal bir dilim konuyor.




$a$–) Kapasitörün yeni sığasını bulunuz.

$b$–) Dilimin çok ince olması durumunda, sığanın içi hava dolu bir kapasitöre dönüştüğünü ve dilimin nereye konulduğunun önemsiz olduğunu gösteriniz.

Dilim iletken olduğu için içindeki elektrik alan sıfırdır. Dolayısıyla, iletken dilim eş-potansiyel yüzeydir. Dilimin dışında kalan bölgeler birbirine seri bağlı iki kapasitör gibi düşünülebilir:

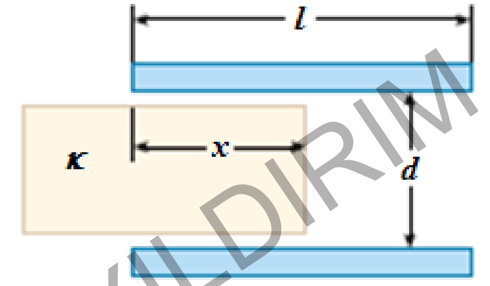
$$a\text{–)}\quad \left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{(d-a)/2} \\[2ex] C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{(d-a)/2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d-a}{2\varepsilon_0 A} + \frac{d-a}{2\varepsilon_0 A} = \frac{d-a}{\varepsilon_0 A} \rightarrow C_{eş} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-a}$$

$b$–) $a \to 0$ durumda, $C_{eş} = \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\varepsilon_0 A}{d-a} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$ (plakaları arası hava dolu paralel plakalı kapasitör)

Dilimi, üst yüzeyi ile üst plaka arasındaki mesafe b olacak şekilde yerleştirirsek:

$$\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{b}{\varepsilon_0 A} + \frac{d-b-a}{\varepsilon_0 A} = \frac{d-a}{\varepsilon_0 A} \rightarrow C_{eş} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-a}$$ ($a$ şıkkı ile aynı sonuç bulunur)

**Örnek :** Paralel plakalı bir kapasitör, kenar uzunluğu $l$ olan ve aralarında $d$ mesafesi bulunan kare şeklinde iki paralel plakadan oluşmuştur. Şekilde gösterildiği gibi, dielektrik sabiti $\kappa$ olan bir dilimin $x$ kadarlık bir bölümü plakalar arasındadır.




$a-$) Kapasitörün sığasını bulunuz.

$b-$) Plakalar arasındaki potansiyel fark $V$ ise, kapasitörde depolanan enerji ne kadardır?

$a-$) Dilimin plakalar arasında kalan kısmı ile plakalar arasında kalan boş kısım, birbirine paralel bağlı iki kapasitör gibi düşünülebilir:

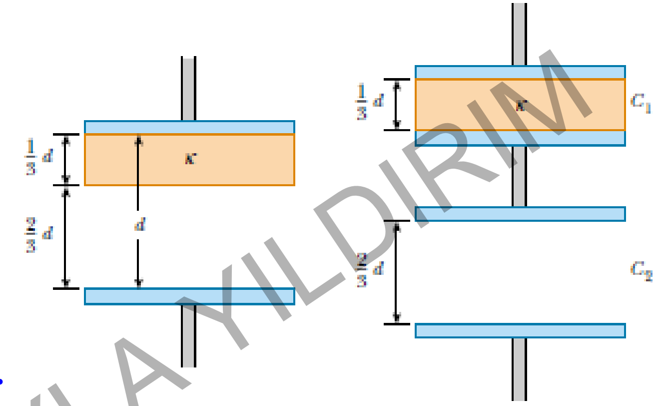
$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\kappa\varepsilon_0 l x}{d} \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_0 l(l-x)}{d} \end{aligned}\right\} \rightarrow C_{eş} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 l}{d}(\kappa x + l - x) = \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left[(\kappa-1)x + l\right]$$

$$x = 0 \rightarrow C_{eş} = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$x = l \rightarrow C_{eş} = \frac{\kappa\varepsilon_0 l^2}{d} = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$$

$b-$) $U = \dfrac{1}{2}C_{eş}V^2 \rightarrow U = \dfrac{\varepsilon_0 l}{2d}\left[(\kappa-1)x + l\right]V^2$

**Örnek :** Alanı $A$ ve aralarındaki mesafe $d$ olan paralel iki metal plaka arasına, şekilde gösterildiği gibi, dielektrik sabiti $\kappa$, kalınlığı $d/3$ ve plakalarla aynı yüzey alanına sahip olan dielektrik bir malzeme yerleştirilmiştir. Bu şekilde oluşan kapasitörün sığasını, dielektrik malzeme konulmadan önceki sığa ($C_0$) cinsinden bulunuz.



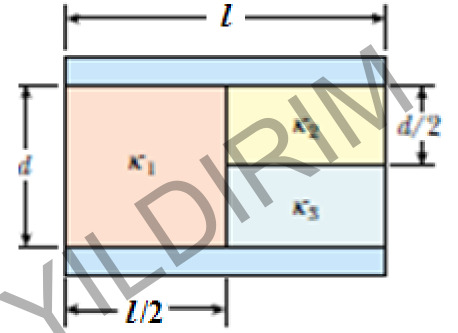

Plakalar arasında dielektrikle dolu olan kısım ile boş olan kısım, birbirine seri bağlı iki kapasitör gibi düşünülebilir:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d/3} \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_0 A}{2d/3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{3\kappa\varepsilon_0 A} + \frac{2d}{3\varepsilon_0 A} = \frac{d}{3\varepsilon_0 A}\left[\frac{1}{\kappa} + 2\right] = \frac{d}{3\varepsilon_0 A}\left(\frac{1+2\kappa}{\kappa}\right)$$

$$C_{eş} = \frac{3\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa}{2\kappa+1}\right)$$

$$\kappa = 1 \quad \rightarrow C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \rightarrow \quad C_{eş} = \left(\frac{3\kappa}{2\kappa+1}\right)C_0$$

**Örnek :** Alanı $A$ ve aralarındaki mesafe $d$ olan paralel iki metal plaka arasına, şekilde gösterildiği gibi, dielektrik sabitleri $\kappa_1$, $\kappa_2$ ve $\kappa_3$ olan dielektrik malzemeler yerleştirilmiştir.
Bu şekilde oluşturulan kapasitörün sığasını bulunuz.



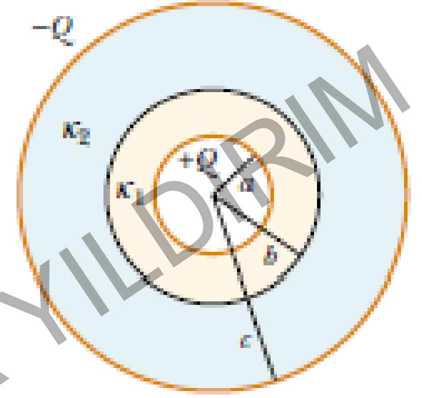

Dielektrik sabitleri $\kappa_2$ ve $\kappa_3$ olan malzemelerle dolu bölgeler birbirine seri bağlı kapasitörler gibi değerlendirilebilir. Bu birleşik bölge de, dielektrik sabiti $\kappa_1$ olan bölge ile paralel bağlıymış gibi düşünülebilir.

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 A/2}{d} \\ C_2 &= \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 A/2}{d/2} \\ C_3 &= \frac{\kappa_3 \varepsilon_0 A/2}{d/2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d}{\kappa_2 \varepsilon_0 A} + \frac{d}{\kappa_3 \varepsilon_0 A} = \frac{d}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{\kappa_2 + \kappa_3}{\kappa_2 \kappa_3}\right]$$

$$C_{23} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3}\right) \rightarrow C_{eş} = C_1 + C_{23} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_3}\right)$$

$$C_{eş} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_3 + 2\kappa_2 \kappa_3}{2(\kappa_2 + \kappa_3)}\right) \quad ; \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1 \rightarrow C_{eş} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

**Örnek :** Eş-merkezli iki iletken küresel kabuktan içtekinin yarıçapı $a$, dıştakinin yarıçapı $c$' dir. Şekilde gösterildiği gibi, kabuklar arasındaki $a < r < b$ bölgesi dielektrik sabiti $\kappa_1$ olan bir malzeme ile, $b < r < c$ bölgesi dielektrik sabiti $\kappa_2$ olan başka bir malzeme ile doldurulmuştur. Bu şekilde oluşturulan kapasitörün sığasını bulunuz.




Küreler arasında farklı dielektrik malzemelerle dolu olan kısımlar, birbirine seri bağlı iki kapasitör gibi düşünülebilir:

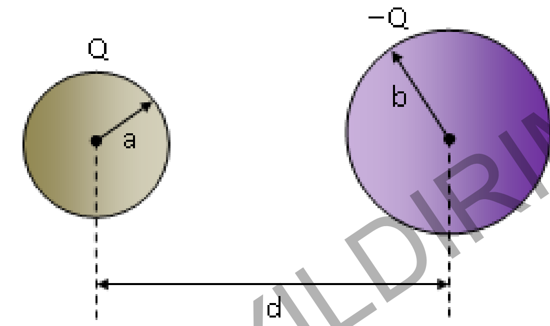
$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 4\pi\kappa_1\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \\ C_2 &= 4\pi\kappa_2\varepsilon_0 \frac{bc}{c-b} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{b-a}{4\pi\kappa_1\varepsilon_0 ab} + \frac{c-b}{4\pi\kappa_2\varepsilon_0 bc} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}\left[\frac{b-a}{\kappa_1 a} + \frac{c-b}{\kappa_2 c}\right]$$

$$\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}\left[\frac{\kappa_2 bc - \kappa_2 ac + \kappa_1 ac - \kappa_1 ab}{\kappa_1\kappa_2 ac}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}\left[\frac{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}{\kappa_1\kappa_2 ac}\right]$$

$$C_{eş} = \frac{4\pi\kappa_1\kappa_2\varepsilon_0 abc}{\kappa_2 c(b-a) + \kappa_1 a(c-b)}$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 1 \quad \rightarrow \quad C_{eş} = \frac{4\pi\varepsilon_0 abc}{c(b-a) + a(c-b)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 abc}{cb - ab} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ac}{c-a}$$

**ÖDEV :** Yarıçapları $a$ ve $b$ olan iki metal kürenin merkezleri arasındaki uzaklık $d$' dir ($d \gg a$ ve $b$). Şekilde gösterildiği gibi, kürelerin yükleri $+Q$ ve $-Q$ ise, sistemin sığasını bulunuz.




Gauss yasası kullanılarak, küre merkezlerinin bulunduğu düzlemde ve küreler arasındaki bölgede elektrik alan:

$$E = \frac{kQ}{r^2} + \frac{kQ}{(d-r)^2} \quad \text{(pozitif yükten negatif yüke doğru)}$$

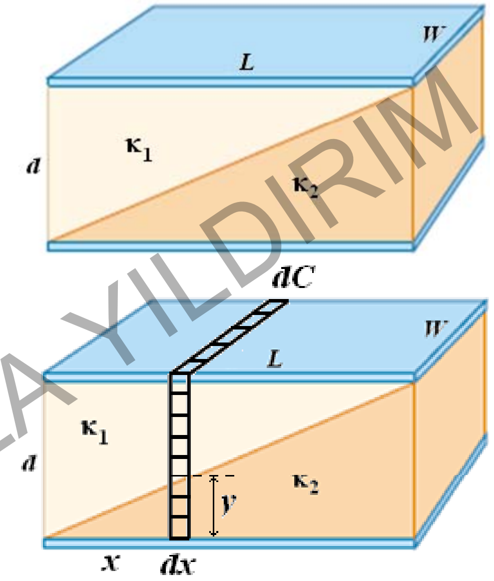
Burada $r$, negatif yüklü kürenin merkezinden olan uzaklıktır.

$$V = V_+ - V_- = -\int_b^{d-a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -kQ \int_b^{d-a} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(d-r)^2} \right) dr \cos 180$$

$$V = kQ \left[ -\left( \frac{1}{d-a} - \frac{1}{b} \right) + \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d-a} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d-a} \right)} \approx \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d} \right)}$$

**ÖDEV :** Paralel plakalı bir kapasitörün plakalarının kenar uzunlukları $L$ ve $W$, plakaları arasındaki mesafe ise $d$ ' dir. Plakalar arasındaki bölge, şekilde gösterildiği gibi, köşeden köşeye çizilen hatla ikiye bölünmüş ve dielektrik sabitleri $\kappa_1$ ve $\kappa_2$ olan malzemelerle doldurulmuştur. Bu şekilde oluşturulan kapasitörün sığasını bulunuz.

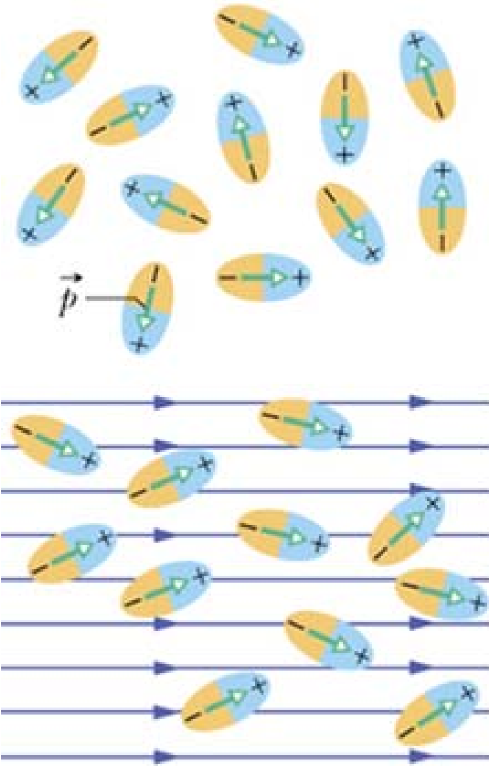



$$\left.\begin{aligned} dC_1 &= \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 W dx}{d-y} \\ dC_2 &= \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 W dx}{y} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{dC_{eş}} = \frac{1}{dC_1} + \frac{1}{dC_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 W dx}\left(\frac{d-y}{\kappa_1} + \frac{y}{\kappa_2}\right) \quad ; \quad \frac{y}{x} = \frac{d}{L}$$

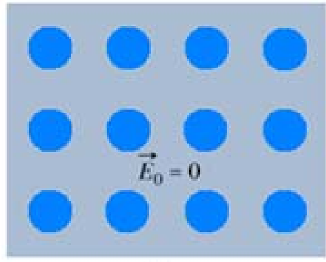
$$C_{eş} = \varepsilon_0 W \int_0^L \frac{dx}{\left(\frac{d}{\kappa_1} + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2}\frac{d}{L}x\right)} = \frac{\varepsilon_0 W}{d}\left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right)\ln\left[\frac{1}{\kappa_1} + \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2}\right)\frac{x}{L}\right]_0^L$$

$$C_{eş} = \frac{\varepsilon_0 W}{d}\left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right)\ln\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) \quad ; \quad \left.\begin{aligned} &\Delta \ll 1 \\ &\kappa_1 = \kappa + \Delta \\ &\kappa_2 = \kappa \end{aligned}\right\} \rightarrow C_{eş} \approx \frac{\varepsilon_0 W}{d}\left(\frac{\kappa^2}{\Delta}\right)\ln\left(1 + \frac{\Delta}{\kappa}\right) \approx \frac{\kappa \varepsilon_0 W}{d}$$

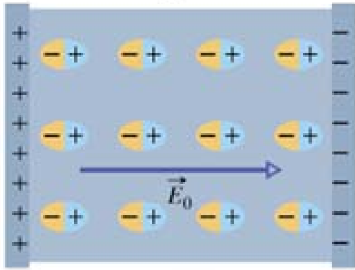
# Dielektrikler : Atomik Bakış



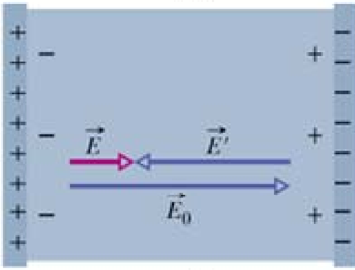
Dielektrikler, "polar" ve "polar olmayan" diye iki sınıfa ayrılır. Polar dielektrikler, elektrik alan sıfır olsa bile yapılarındaki yük dağılımlarının simetrik olmayışından dolayı sıfırdan farklı dipol momente sahiplerdir ($H_2O$). Elektrik alan sıfırken dipollerin yönelimleri gelişigüzel dağılım gösterir (Şekil-*a*). Düzgün bir $\vec{E}_0$ dış elektrik alan uygulandığında (Şekil-*b*), minimum enerji durumuna karşılık geldiği için $\left(U = -\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$ dipoller elektrik alanla aynı yönde yönelmeyi tercih edeler. Termal hareketlilik nedeniyle bu yönelim tam olarak gerçekleşemez. Ancak, bu kısmi yönelim kendisini oluşturan dış elektrik alanla zıt yönde bir iç elektrik alan oluşturur. Bu nedenle, net elektrik alan $\vec{E}$ dışardan uygulanan $\vec{E}_0$ alanından daha **zayıftır**.



(a)



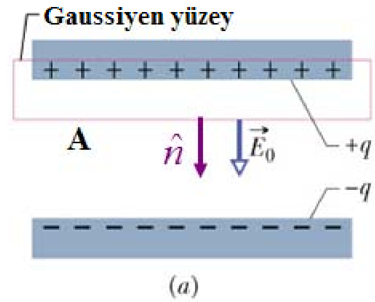
(b)



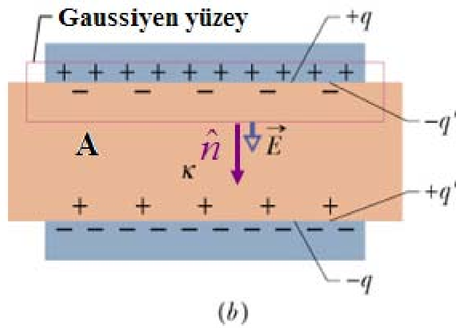
(c)

Polar olmayan dielektrikler, elektrik alanın olmadığı durumda herhangi bir dipol momente sahip değildir (Şekil-*a*). Plakaları arasında düzgün elektrik alanının $\vec{E}_0$ olduğu paralel plakalı bir kapasitörün plakaları arasına böyle bir dielektrik malzeme koyarsak, $\vec{E}_0$ alanı kendisiyle aynı yönde yönelmiş bir $\vec{p}$ elektrik dipol momenti indükler (Şekil-*b*). Yönelen moleküller dielektriğin içinde net bir yük oluşturmazlar. Ancak, dielektriğin plakalara yakın yüzeylerinde net bir yük birikimi oluşur. İndüklenen bu yükler, dipolün negatif ve pozitif uçlarından kaynaklanır ve yakın oldukları plakanın yükü ile ters işaretlidir. Bu yükler, dielektriğin içinde $\vec{E}_0$ ile ters yönde bir $\vec{E}'$ elektrik alanı oluşturur (Şekil-*c*) ve bunun sonucunda da, kapasitörün plakaları arasındaki net elektrik alan $\vec{E}$ daha zayıftır ($E = E_0 / \kappa$).

# Dielektriğin Varlığında Gauss Yasası :



(a)



(b)

Tamamen dielektrikle kaplı bir ortamda Gauss yasası nasıl ifade edilir? Plakaları arası hava dolu olan paralel plakalı bir kapasitörün (Şekil-*a*) plakaları arasındaki bölgede elektrik alan, Gauss yasasından,

$$\Phi = E_0 A = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

ifadesine sahiptir.

Aynı kapasitörün plakaları arası dielektrik sabiti $\kappa$ olan bir yalıtkanla tamamen dolu (Şekil-*b*) ise, dielektriğin plakalara yakın yüzeylerinde indüklenen yük $q'$ olmak üzere:

$$\Phi = EA = \frac{q-q'}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q-q'}{A\varepsilon_0} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q-q'}{A\varepsilon_0}$$

$$q - q' = \frac{q}{\kappa} \rightarrow \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\kappa\varepsilon_0}$$

sonucu elde edilir.

Dielektriğin varlığında Gauss yasası: $\Phi = \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Bu sonuç paralel plakalı kapasitör için türetilmiş olsa da, tüm diğer durumlar için de doğru ve geçerlidir.

**Not 1 :** Akı ifadesi dielektrik sabiti $\kappa$' yı içermektedir.

**Not 2 :** Dielektriğin varlığında yazılan Gauss yasasındaki $q$ yükü kapasitörün yüküdür, dielektrik malzemenin yüzeyinde indüklenen yükle ilgisi yoktur.

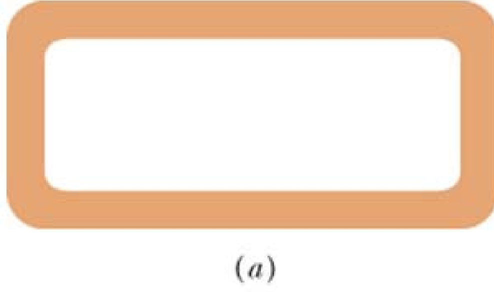
**Not 3 :** Gauss yüzeyinin her yerinde sabit olmayabileceği genel durumu düşünülerek, dielektrik sabiti $\kappa$ integral içine alınmıştır.

# BÖLÜM-26
# Akım ve Direnç

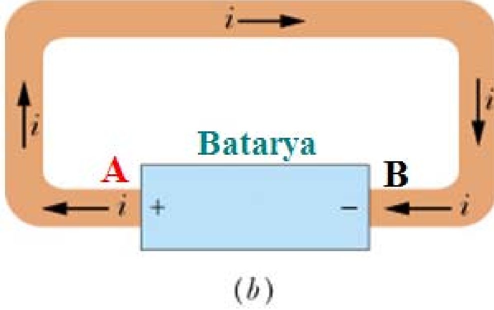
Bu bölüm kapsamında şağıdaki konulara yer verilecektir:

- **Elektrik akımı (*i*)**
- **Elektrik akım yoğunluğu ($\vec{J}$)**
- **Sürüklenme hızı ($\vec{v}_d$)**
- **Bir iletkenin direnci (*R*) ve özdirenci ($\rho$)**
- **Ohm yasası, ohmik ve ohmik olmayan iletkenler**
- **Elektrik devrelerinde Güç**

# Elektrik Akımı :

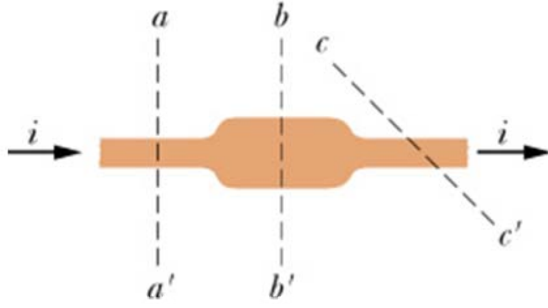

(a)

Soldaki ilk resimde (Şekil-*a*), içinde ve yüzeyindeki her noktanın aynı potansiyelde olduğu bir iletken verilmiştir. İletkenin içindeki serbest elektronlar gelişigüzel hareket ettiklerinden, herhangi bir yönde net yük akışı yoktur.



(b)

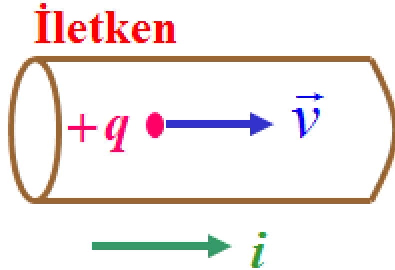
İletkenin belirli bir noktadan kesilip araya bir batarya koyduğumuzu varsayalım (Şekil-*b*). Bu son durumda *A* ve *B* noktaları arasında, batarya gerilimine eşit, $V_A - V_B$ potansiyel farkı oluşmuştur. Artık durum statik değildir ve iletkenin içinde belirli bir doğrultuda net bir yük akışı vardır. İletkendeki bu net yük akışına, "elektrik akımı" denir.

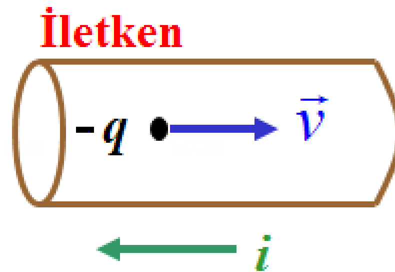



Şekilde, bir bataryaya bağlı ve içinden akım geçen iletkenin bir parçası görülmektedir. $aa'$ ; $bb'$ veya $cc'$ ile gösterilen kesitlerden herhangi birisini ele alalım. Elektrik akımı $i$, ilgili kesitten birim zamanda geçen yük miktarı olarak tarif edilir. Başka deyimle, ilgili kesitteki yük akış hızı olarak bilinir. Matematik olarak:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (\text{C/s} \equiv \text{amper, A})$$

ifadesine sahiptir.



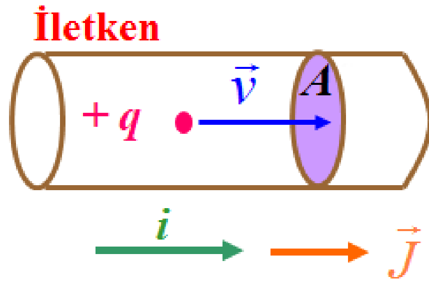



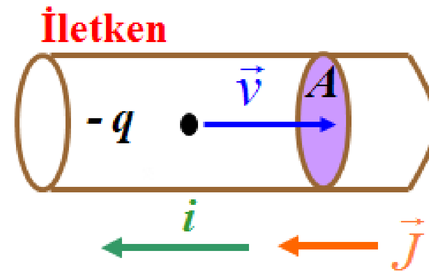

**Akımın Yönü :**

İletkenlerde akımın yönü okla ( $\rightarrow$ ) gösterilir ve akımı oluşturan yüklü parçacıkların işareti ile şu şekilde ilişkilidir:

**1.** Akım **positive** yüklerin hareketinden kaynaklanıyorsa, yönü yüklerin $\vec{v}$ hızı ile aynı yöndedir.

**2.** Akım **negative** yüklerin hareketinden kaynaklanıyorsa, yönü yüklerin $\vec{v}$ hızı ile ters yöndedir.



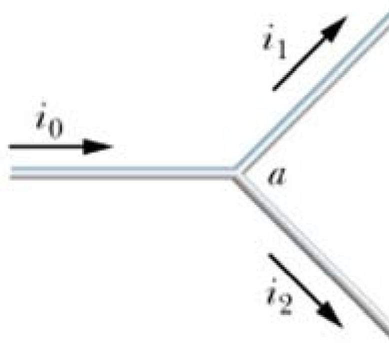

**Akım Yoğunluğu :** Akım yoğunluğu vektörel bir niceliktir ve büyüklüğü,

$$J = \frac{i}{A} \quad (\mathrm{A/m^2})$$

ile verilir. Akım yönüne dik olan birim kesitten geçen akım miktarı olarak tarif edilir ve elektrik akımı ile aynı yöndedir. Bir iletkenden geçen toplam akım, akım yoğunluğu ($\vec{J}$) cinsinden:

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

ile verilir.




Akım yoğunluğu vektörel bir nicelik olduğu halde, akımın kendisi skaler bir niceliktir. Yanda, bir elektrik devresinden bir parça verilmiştir. $a$ noktasına gelen $i_0$ toplam akımı, $i_1$ ve $i_2$ olam üzere ikiye ayrılmıştır. Yükün korunumu gereği $i_0 = i_1 + i_2$ olacaktır. Dikkat edilirse, toplam akımı bulmak için herhangi bir vektörel toplama işlemi yapılmamıştır.

**Örnek :** Yükü 8.0 nC olan bir nokta yük, çembersel bir yörüngede $100\pi$ rad/s' lik bir açısal frekansla dönmektedir. Nokta yükün bu dönü hareketi nedeniyle oluşan akımı hesaplayınız.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0.02 \text{ s}$$

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \rightarrow i = \frac{8.0\times10^{-9}}{0.02} = 4.0\times10^{-7} \text{ A}$$

**Örnek :** Kesit alanı 2 $\text{cm}^2$ olan bir telden geçen yük $q(t) = 4t^5 + 5t + 6$ C ile veriliyor. $t = 1$ s anında telden geçen akımı ve teldeki akım yoğunluğunu bulunuz.

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = 20t^4 + 5 \rightarrow i(1) = 25 \text{ A}$$

$$J = \frac{i}{A} = \frac{25}{2\times10^{-4}} = 1.25\times10^5 \text{ A/m}^2$$

**Örnek :** Bir telden geçen akım $i(t) = 100\sin(120\pi t)$ ifadesine sahiptir. Burada, $t$ saniye cinsinden ve akım amper cinsindendir. $t = 0$ ile $t = 1/240$ s arasında telin kesitinden geçen toplam yük miktarını bulunuz. Akımı oluşturan yüklü parçacıklar elektronlarsa, bu kadar sürede telin kesitinden kaç tane elektron geçmiştir?

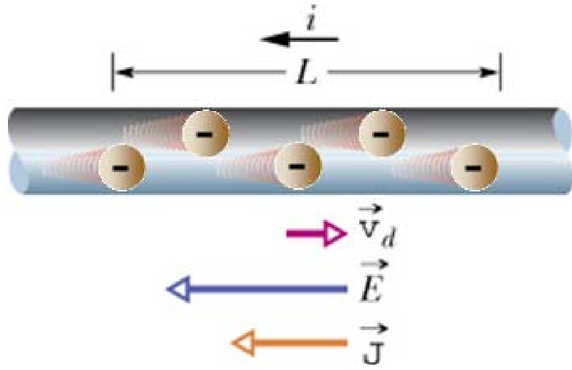
$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow dq = idt = 100\sin(120\pi t)dt$$

$$q = \int_0^{1/240} 100\sin(120\pi t)dt = -100\frac{1}{120\pi}\left[\cos(120\pi t)\right]_0^{1/240}$$

$$q = -\frac{5}{6\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2} - 1\right] = \frac{5}{6\pi} = 2.618\text{ C}$$

$$N\left|e\right| = 2.618\text{ C} \rightarrow N = \frac{2.618}{1.6\times10^{-19}} \cong 1.64\times10^{19} \quad \text{tane elektron.}$$

# Sürüklenme Hızı $(v_d)$:




Bir iletkenden akım geçmesi, elektrik alanın etkisiyle yüklerin belirli bir yönde akması anlamına gelir. Bu akış, "sürüklenme hızı" dediğimiz ortalama bir $\vec{v}_d$ hızıyla gerçekleşir. Yükler iletken içinde gelişigüzel hareket etmeye devam ederken, aynı zamanda da sürüklenirler.

Şekilde kesit alanı $A$ olan bir iletken verilmiştir. Akımı oluşturan yüklü parçacıkların elektronlar ve iletkenin birim hacmindeki serbest elektron sayısının da $n$ olduğunu varsayalım.

İletkenin $L$ uzunluğundaki bir parçasındaki toplam yük:

$q = (nAL)e$ ile verilir ve bu bölgedeki tüm yük $t = L / v_d$ kadarlık bir sürede $A$ kesitinden geçer. Bu durumda iletkenden geçen akım ve iletkendeki akım yoğunluğu:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{L / v_d} = nAv_d e \;\; ; \;\; J = \frac{i}{A} = \frac{nAv_d e}{A} = nev_d \;\; \rightarrow$$

Akım yoğunluğu ile elektronların hızı ters yönlü olduğundan

$\vec{J} = -ne\vec{v}_d$ şeklinde yazılır.

**Örnek :** Kesit alanı $3.31\times10^{-6}\ \text{m}^2$ olan bakır bir telden 10 A şiddetinde akım geçmektedir. Her bir bakır atomunun elektronlarından sadece birisi akımın oluşumuna katkı verdiğine ve bakırın yoğunluğu 8.95 g/cm$^3$ olduğuna göre, elektronların sürüklenme hızını hesaplayınız. (Bakırın molar kütlesi: 63.5 g/mol).

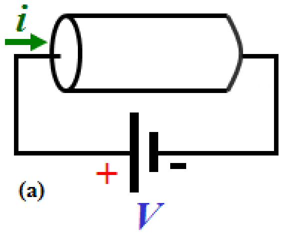
1 mol bakırın hacmi: $V = \dfrac{m}{d} = \dfrac{63.5}{8.95} = 7.09\ \text{cm}^3$

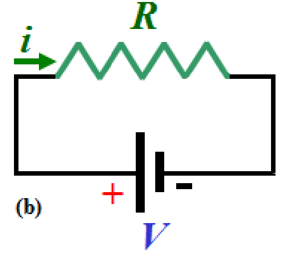
1 mol bakırda $6.02\times10^{23}$ tane bakır atomu olduğuna göre, elektron yoğunluğu:

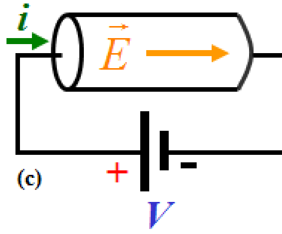
$$n = \frac{6.02\times10^{23}}{7.09\times10^{-6}} = 8.49\times10^{28}\ \text{elektron/m}^3$$

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{I}{neA} = \frac{10}{\left(8.49\times10^{28}\right)\cdot\left(1.6\times10^{-19}\right)\cdot\left(3.31\times10^{-6}\right)}$$

$$v_d = 2.23\times10^{-4}\ \text{m / s}$$




## Direnç :

Bir iletkenin iki ucu arasına, şekildeki gibi, $V$ potansiyel farkı uygulanırsa o iletkenden $i$ akımı geçer. Direnç, bir iletkenin içinden geçen akıma, başka deyimle içindeki yük akışına karşı gösterdiği tepki ya da karşı koyuşun bir ölçüsüdür. Matematik olarak:

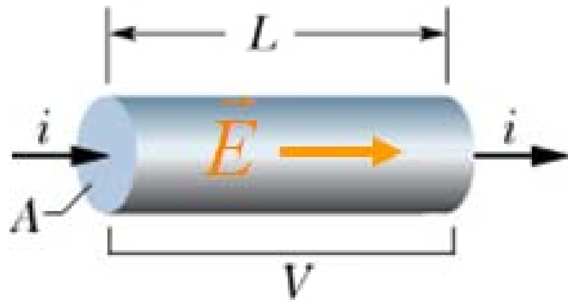
$$R = \frac{V}{i} \quad (\text{V/A} = \text{ohm}, \ \Omega)$$

eşitliği ile verlir. Elektrik devrelerindeki sembolik gösterimi şekil-b'de verilmiştir.

## Özdirenç ($\rho$):

Durgun elektriğin tersine, iletkenin içinde elektrik alan artık sıfır değildir. İletkenin içindeki elektrik alan iletkendeki akım yoğunluğu ile doğru oratılıdır ve orantı sabitine de o iletkenin "özdirenci" denir ($\vec{E} = \rho \vec{J}$). SI sistemindeki birimi:

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \ \rightarrow \ \rho = \frac{E}{J} \ \rightarrow \ \left( \frac{\text{V/m}}{\text{A/m}^2} = \frac{\text{V}}{\text{A}}\text{m} = \Omega \cdot \text{m} \right).$$




# İletkenlik ($\sigma$) :

İletkenlik özdirencin tersidir ($\sigma = 1/\rho$) ve birimi $(\Omega \cdot m)^{-1}$' dir. Bir iletkenin elektriği ne kadar iyi ilettiğinin bir ölçüsüdür. Elektriği iyi iletebilen malzemelerin iletkenlikleri de o denli büyüktür.

Böylece, akım yoğunluğu ile elektrik alan arasındaki eşitlik, iletkenlik cinsinden,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

formunda da yazılabilir. Yukarıdaki iletkenin içindeki elektrik alan ile iletkendeki akım yoğunluğu birlikte değerlendirilirse, bir iletkenin direnci ($R$) ile özdirenci ($\rho$) arasında,

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{V}{L} \\ J &= \frac{i}{A} \end{aligned}\right\} \rightarrow \rho = \frac{E}{J} = \frac{V/L}{i/A} = \frac{V}{i}\frac{A}{L} = R\frac{A}{L} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R = \rho\frac{L}{A}}$$

ile verilen bir ilişki olduğu ortaya çıkar.

**Örnek :** Kesit alanı $2.00\times10^{-4}\ \text{m}^2$ ve uzunluğu 10.0 cm silindirik bir aliminyum telin direncini hesaplayınız. Aynı boyutlara sahip, öz-direnci $3.00\times10^{10}\ \Omega\cdot\text{m}$ olan cam bir silindir için yukarıdaki hesabı tekrar yapınız. ($\rho_{Al} = 2.82\times10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m}$)

$$R = \rho\frac{L}{A} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} R_{Al} &= \rho_{Al}\frac{L}{A} = 2.82\times10^{-8}\left(\frac{0.1}{2.00\times10^{-4}}\right) = 1.41\times10^{-5}\ \Omega \\ R_{cam} &= \rho_{cam}\frac{L}{A} = 3.00\times10^{10}\left(\frac{0.1}{2.00\times10^{-4}}\right) = 1.50\times10^{13}\ \Omega \end{aligned}\right\}$$

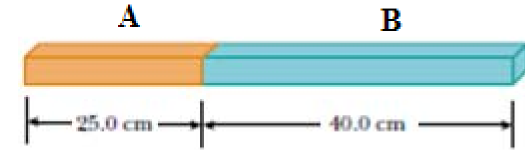
**Örnek :** Yarıçapı 0.321 mm olan nikromdan yapılmış telin birim uzunluğunun direncini hesaplayınız. 1 m uzunluğundaki nikrom telin uçları arasınan 10 V' luk bir potansiyel fark uygulanırsa, teldeki akım ne olur? ($\rho_{Ni-Cr} = 1.15\times10^{-6}\ \Omega\cdot\text{m}$)

$$A = \pi r^2 = \pi\left(0.321\times10^{-3}\right)^2 = 3.24\times10^{-7}\ \text{m}^2$$

$$\frac{R}{L} = \frac{\rho}{A} = \frac{1.5\times10^{-6}}{3.24\times10^{-7}} = 4.6\ \Omega/\text{m}$$

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{10}{(4.6)(1)} = 2.2\ \text{A}$$

**Örnek :** Farklı malzemelerden yapılmış, kenar uzunluğu 3 mm olan kare kesitli iki tel şekildeki gibi birleştirilmiştir. Birinci tel 25 cm uzunluğunda ve öz-direnci $4\times10^{-5}\ \Omega\cdot$m, ikincisi ise 40 cm uzunluğunda ve öz-direnci $6\times10^{-5}\ \Omega\cdot$m'dir. Birleşik telin toplam direncini hesaplayınız.

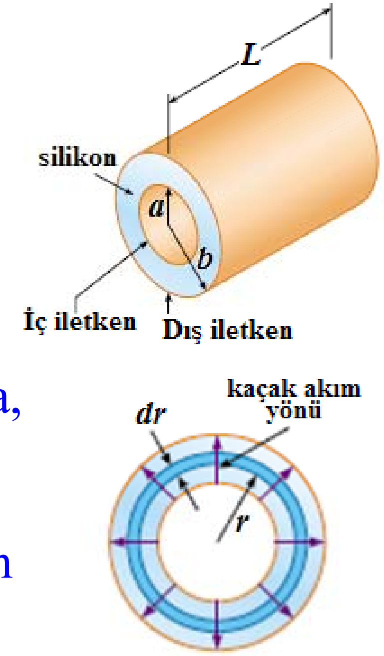



$$R=\rho\frac{L}{A}\quad\rightarrow\quad\left.\begin{aligned}R_A&=\rho_A\frac{L}{A}=4\times10^{-5}\frac{0.25}{\left(3\times10^{-3}\right)^2}=\frac{10}{9}\ \Omega\\R_B&=\rho_B\frac{L}{A}=6\times10^{-5}\frac{0.40}{\left(3\times10^{-3}\right)^2}=\frac{24}{9}\ \Omega\end{aligned}\right\}$$

Teller birbirine eklendiği için, toplam direnç:

$$R=R_A+R_B=\frac{10}{9}+\frac{24}{9}=\frac{34}{9}=3.78\ \Omega$$

**Örnek :** Şekilde, iç iletkeninin yarıçapı $a = 0.5$ cm, dış iletkeninin yarıçapı $b = 1.75$ cm ve uzunluğu $L = 15$ cm olan koaksiyel bir kablo verilmiştir. Koaksiyel kablolar, akım kablo boyunca akacak şekilde tasarlanırlar. İletkenler arası bölge, akım kaçaklarını önlemek için tamamen silikonla kaplanır. İki iletken arasındaki silikonun direncini hesaplayınız. İletkenler arasına 12 V' luk bir potansiyel fark uygulanırsa, kaçak akım miktarı ne kadardır? ($\rho_{Si} = 640\ \Omega \cdot \text{m}$)




Kablodaki kaçak akım yönü radyal doğrultudadır. Yani, iç iletkenden dış iletkene doğrudur. Kablo ile aynı eksenli ve aynı boyda, yarıçapı $r$ ve kalınlığı $dr$ olan silindirik bir kabuğun direnci:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad \rightarrow \quad dR = \rho \frac{dr}{2\pi r L}$$

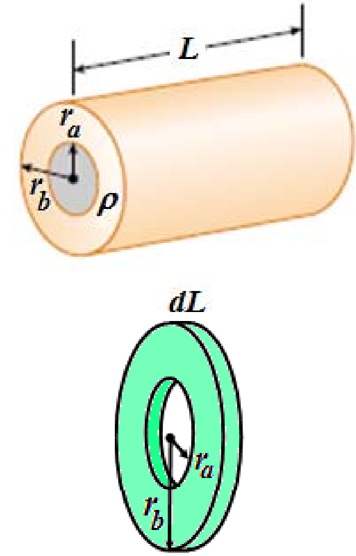
ifadesine sahiptir. Dolayısı ile silikonla kaplı bölgenin toplam direnci ve kaçak akım:

$$R = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow R = \frac{640}{2\pi(0.15)} \ln\left(\frac{1.75}{0.5}\right) = 851\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{851} = 14.1\ \text{mA}$$

olarak bulunur.

**Örnek :** Şekilde öz-direnci $\rho$, uzunluğu $L$, iç yarıçapı $r_a$ ve dış yarıçapı $r_b$ olan silindirik bir kabuk verilmiştir. Silindirin iki ucu arasına gerilim farkı uygulandığında, akım silindir ekseni boyunca akmaktadır. Bu uçlar arasında silindirin direncini bulunuz.




Silindir ile aynı eksenli ve $dL$ uzunluğundaki bir kesitin direnci:

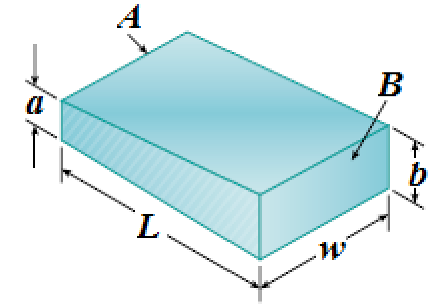
$$R = \rho \frac{L}{A} \quad \rightarrow \quad dR = \rho \frac{dL}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}$$

ifadesine sahiptir. Silindir ekseni boyunca bu dirençleri üst üste toplarsak, toplam direnç:

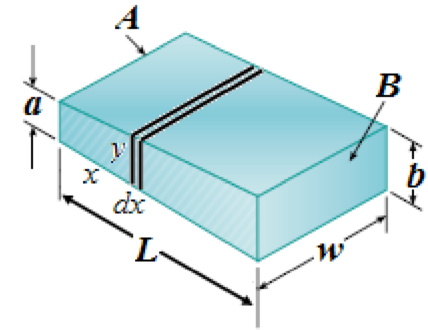
$$R = \int_0^L \rho \frac{dL}{\pi\left(b^2 - a^2\right)} = \frac{\rho}{\pi\left(b^2 - a^2\right)} \int_0^L dL = \frac{\rho L}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}$$

olarak bulunur.

**Örnek :** Şekilde, ön yüzeyinin (A) kesiti *aw*, arka yüzeyinin kesiti *bw* olan *L* uzunluğuna ve $\rho$ öz-direncine sahip bir cisim verilmiştir. Bu cismin A ve B yüzeyleri arasındaki direncini bulunuz.




A yüzeyine paralel ve *x* kadar uzakta, kalınlığı *dx* olan bir plakanın direnci:



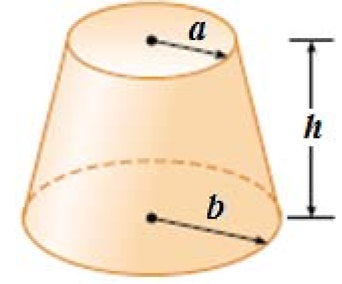

$$R = \rho \frac{L}{A} \;\rightarrow\; dR = \rho \frac{dx}{wy} = \frac{\rho}{w} \frac{dx}{\left(\frac{b-a}{L}\right)x + a} \quad ; \quad \frac{b-a}{L} = \frac{y-a}{x}$$

ifadesine sahiptir. A yüzeyinden B yüzeyine kadar bu dirençleri üst üste toplarsak, toplam direnç:

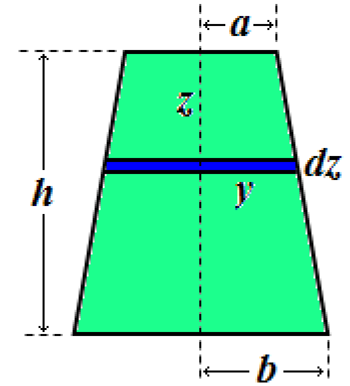
$$R = \frac{\rho}{w}\int_0^L \frac{dx}{\left(\frac{b-a}{L}\right)x + a} = \frac{\rho L}{w(b-a)} \ln\left[\left(\frac{b-a}{L}\right)x + a\right]_0^L = \frac{\rho L}{w(b-a)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

olarak bulunur.

**ÖDEV :** Şekilde, tabanının yarıçapı $b$ ve tavanının yarıçapı $a$ olan $h$ yüksekliğine ve $\rho$ öz-direncine sahip kesik koni şeklinde bir cisim verilmiştir. Bu cismin tavanı ile tabanı arasındaki direncini bulunuz.




Tavan yüzeye paralel ve $z$ kadar uzakta, kalınlığı $dz$ olan bir plakanın direnci:



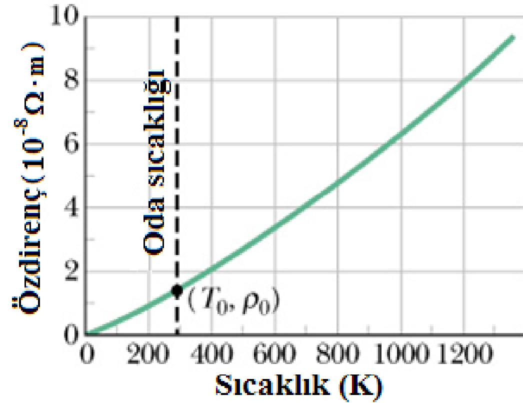

$$R = \rho \frac{L}{A} \;\rightarrow\; dR = \rho \frac{dz}{\pi y^2} = \frac{\rho}{\pi} \frac{dz}{\left[ \left( \frac{b-a}{L} \right) z + a \right]^2} \quad ; \quad \frac{b-a}{L} = \frac{y-a}{z}$$

ifadesine sahiptir. Tavan yüzeyinden taban yüzeyine kadar bu dirençleri üst üste toplarsak, toplam direnç:

$$R = \frac{\rho}{\pi} \int_0^L \frac{dz}{\left[ \left( \frac{b-a}{L} \right) z + a \right]^2} = -\frac{\rho L}{\pi (b-a)} \left[ \frac{1}{\left( \frac{b-a}{L} \right) z + a} \right]_0^L = \frac{\rho L}{\pi a b}$$

olarak bulunur.

## Özdirencin Sıcaklıkla Değişimi :




Şekilde bakırın özdirencinin sıcaklıkla nasıl değiştiği verilmiştir. Bu değişim neredeyse çizgiseldir ve birçok iletken için benzerdir.

Birçok pratik uygulamalarda, özdirencin sıcaklığa bağlılığı matematiksel olarak,

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \alpha \left( T - T_0 \right) \right]$$

bağıntısı ile verilir. Buradaki $\alpha$ sabitine "özdirencin sıcaklık katsayısı" denir. $T_0$ kelvin cinsinden oda sıcaklığı (293 K) ve $\rho_0$' da iletkenin oda sıcaklığındaki özdirencidir. Örneğin, bakırın oda sıcaklığındaki özdirenci: $\rho_o = 1.69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$' dir.

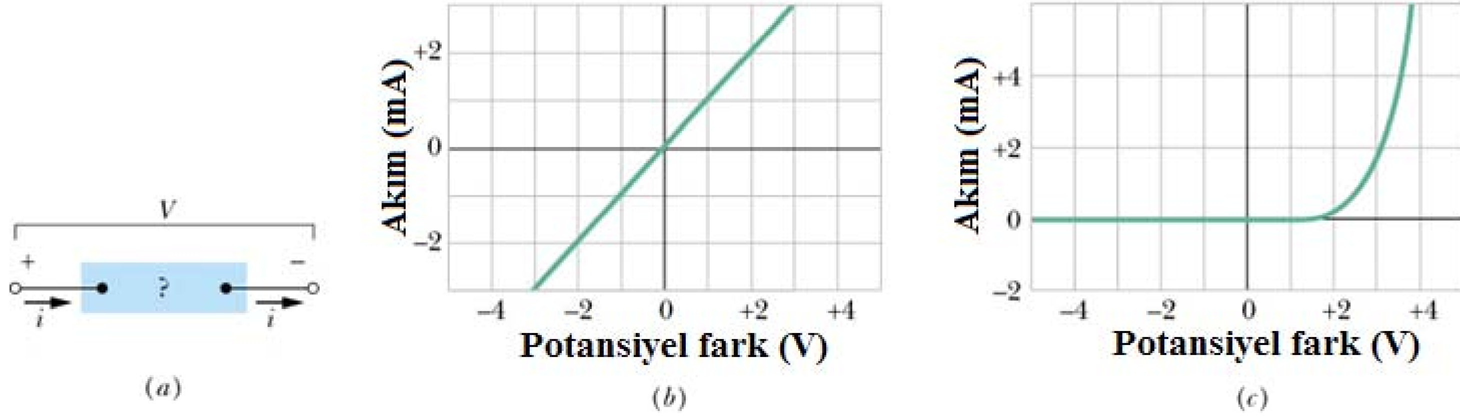
**Örnek :** Bir ampülün içindeki tungsten telin direnci, ampül yanmıyorken ($T_0$ = 20 $^{o}$C) 19 Ω, yanıyorken 140 Ω' dur. Ampül yanıyorken sıcaklığı ne kadardır? ($\alpha_{tungsten} = 4.5\times 10^{-3}$).

$$\rho = \rho_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right] \quad ; \quad R = \rho\frac{L}{A}$$

$$R = R_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]$$

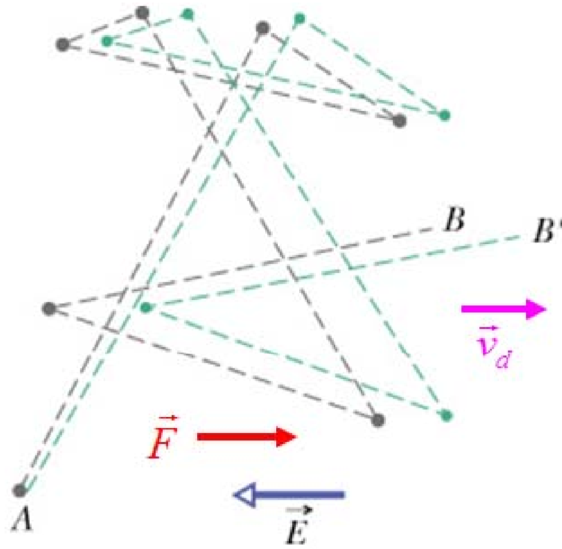
$$T = \left(\frac{R}{R_0}-1\right)\frac{1}{\alpha}+T_0 \quad \rightarrow \quad T = \left(\frac{140}{19}-1\right)\frac{1}{4.5\times 10^{-3}}+20 = 1435 \ ^{o}\mathrm{C}$$

# Ohm Yasası :




Şekil-*b*' de bir direnç üzerinden geçen $i$ akımının, direncin uçları arasındaki $V$ potansiyel farkına bağlı değişimi verilmiştir. Akım-gerilim ($i$ - $V$ eğrisi) karakteristiği denilen bu eğri, orijinden geçen bir doğrudur. Bu tür iletklenlere "**Ohmik**" iletkenler adı verilir ve ohm yasasına uyarlar. Tanım olarak ohm yasası: "Bir iletkenden geçen akım, sabit bir sıcaklıkta, iletkenin iki ucu arasındaki potansiyel farkla doğru orantılıdır". Her iletkenohm yasasına uymaz. Bu tür iletkenlere "**Ohmik olayan**" iletkenler diyoruz. Örnek olarak, şekil-*c*' de yarı-iletken bir diyotun akım-gerilim karakteristiği verilmiştir. Görüldüğü gibi $V / i \; (= R)$ oranı sabit değildir. Üstelik, gerilim ters çevrildiğinde diyot akımı iletmez.

## Ohm Yasasına Mikroskopic Bir Bakış :




Neden bazı cisimlerin ohm yasasına uyduğunu anlamak için, iletimin nasıl gerçekleştiğine atomik düzeyde bakmak gerekir. Örnek olarak, bakırda iletimin nasıl gerçekleştiği yandaki şekilde gösterilmiştir. İletken içindeki serbest elektronların gelişigüzel hareketleri yaklaşık olarak $10^6$ m/s mertebesindeki hızlarla olur ve sürekli olarak bakır atomlarıyla çarpışırlar.

Serbest elektronun bir iletken içindeki $A$ ve $B$ noktaları arasında izlediği yol yukarıdaki şekilde gri kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Düzgün bir $\vec{E}$ elektrik alanı uygulandığında, elektronun izlediği yol ise aynı şekil üzerinde yeşil renkte kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Elektriksel kuvvetin etkisiyle, elektron sağa doğru küçük bir $v_d$ sürüklenme hızı kazanmış ve $B'$ noktasına ulaşmıştır.

İletken içindeki serbest elektronlardan sadece birini düşünelim. Ardışık çarpışmalar arasında geçen ortalama süre $\tau$ olsun. Üzerinde etkiyen elektriksel kuvvet elektron ivme kazanır:

$$F = eE \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$$

Her çarpışmada elektronun tüm kinetik enerjisini kaybettiğini varsayarsak, elektronun sürüklenme hızı,

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m} \qquad \text{(Eş-1)}$$

olur. $J$ akım yoğunluğuna sahip bir iletkende elektronların sürüklenme hızı,

$$J = nev_d \rightarrow v_d = \frac{J}{ne} \qquad \text{(Eş-2)}$$

eşitliği ile verilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse,

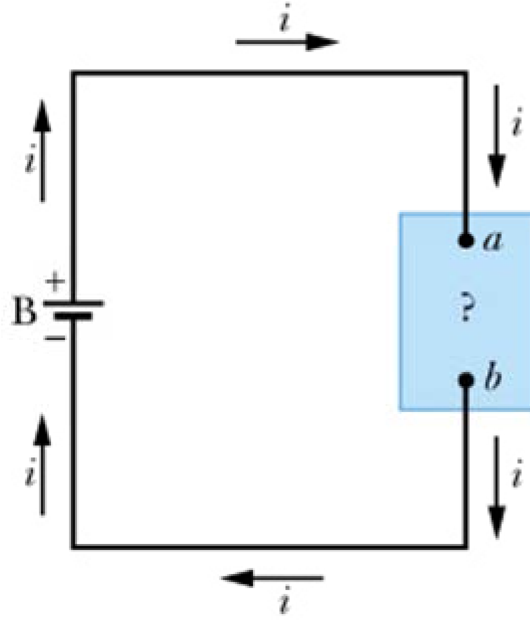
$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m} \rightarrow E = \left(\frac{m}{ne^2\tau}\right)J$$

sonucu elde edilir. Bu son eşitlikten:

$$E = \rho J \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{m}{ne^2\tau}$$

bağıntısı elde edilir. Eğer $\tau$ elektrik alana bağlı değilse, iletkenin özdirenci değişmez ve ohm yasası ile uyumludur.

# Elektrik Devrelerinde Güç :




Şekilde verilen elektrik devresini düşünelim. Bir cihazın (direnç, motor, ...) $a$ ve $b$ uçları arasına batarya ile $V$ gerilimi uygulanmıştır. Devreden geçen $i$ akımı nedeniyle cihazın bir ucundan diğerine $dt$ kadarlık bir zamanda $dq = idt$ kadar bir yük geçer.

Potansiyel enerjideki azalma $dU = Vdq = Vidt$ kadardır. Bu enerji batarya tarafından cihaza aktarılır. Bataryadan cihaza enerji aktarılma hızı "**güç**" olarak tanımlanır ve

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{Vidt}{dt} \quad \rightarrow \quad P = iV \quad (\mathrm{V \cdot A \equiv watt,\ W})$$

ifadedine sahiptir.

Ohmik bir direnç üzerinde açığa çıkan güç ifadesinde $V = iR$ eşitliği kullanılarak $P = iV = i^2 R = V^2 / R$ olarak yazılabilir.

**Örnek :** Direnci 8 Ω olan nikrom bir telin uçları arasına 120 V' luk bir poatnsiyel fark uygulanarak bir elektrik ısıtıcısı yapılıyor. Telden geçen akımı ısı üretilme hızını bulunuz.

$$i = \frac{V}{R} = \frac{120}{8} = 15 \text{ A}$$

$$P = i^2 R = (15)^2 \times 8 = 1800 \text{ J/s}$$

**Örnek :** 240 V' luk bir gerilim altında çalışan ve 20 A akım çeken bir fırında 4 saat boyunca pişirilen bir yemek için ödenecek elektrik parası ne kadardır? (elektriğin kW-saat' i 15 kuruştur).

$$P = iV = 20 \times 240 = 4800 \text{ W} = 4.8 \text{ kW}$$

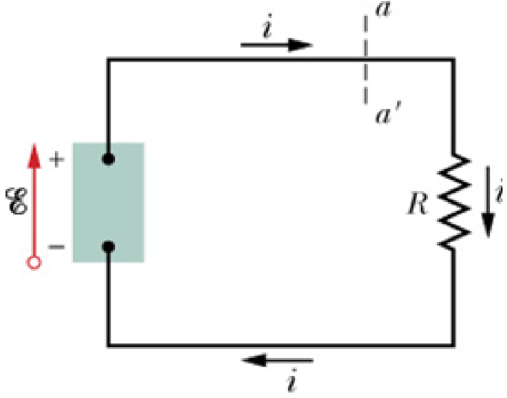
$$Enerji = W = P \times t = 4.8 \times 4 = 19.2 \text{ kW-saat}$$

$$\text{Tutar} = 19.2 \times 15 = 288 \text{ kuruş} = 2.88 \text{ TL}$$

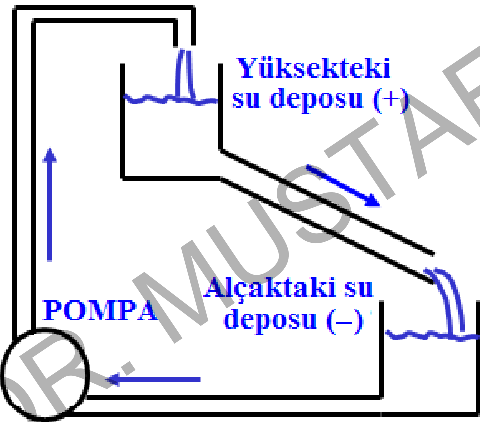
# BÖLÜM-27
# Devreler

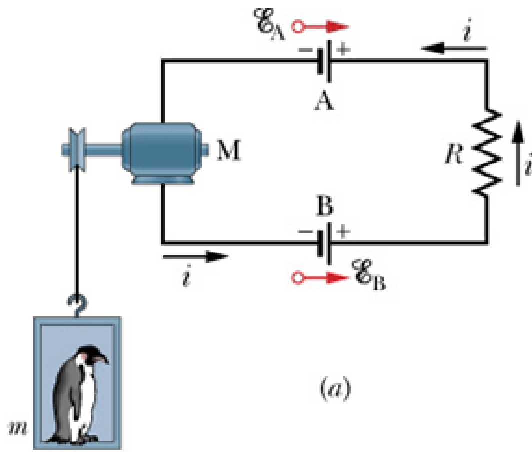
Bu bölümde aşağıda listelenen konulara değinilecektir:

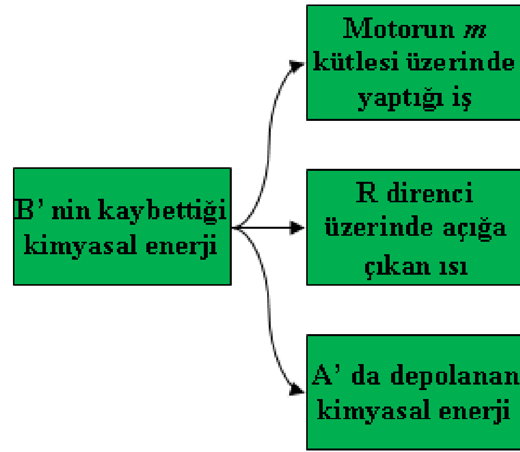
**Elektromotor kuvvet (emk)**
**Gerçek ve ideal emk kaynakları**
**Kirchhoff' un çevrim kuralı**
**Kirchhoff' un kavşak kuralı**
**Çok halkalı devreler**
**Seri bağlı dirençler**
**Paralel bağlı dirençler**
**Bir kapasitörün dolması ve boşalması, RC devresi**



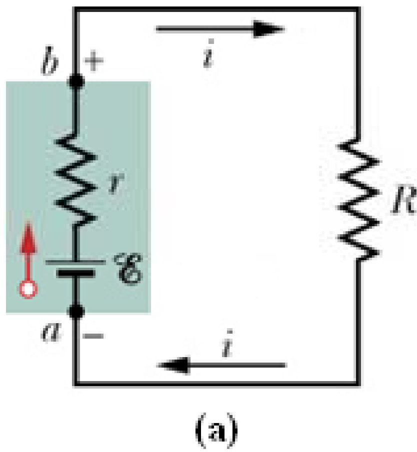

Bir iletkende akımın sürekli olması için, iki ucu arasına potansiyel fark uygulamak gerekir. İletken içinde oluşan elektrik alan, sürekli olarak bir ucundan diğerine yük pompalar. Bir iletkenin iki ucu arasında sürekli bir potansiyel fark oluşturmaya yarayan cihaza "emk kaynağı" adı verilir. Bir üretecin emk' sı, elektromotor kuvvet kaynağı tarafından yük taşıyıcıları üzerine birim yük başına yaptığı iş ($\mathcal{E} = dW / dq$) olarak tanımlanır. Birimi J/C veya volt' tur. Batarya, pil, akü birer emk kaynağıdır. Bu cihazlar sanki bir "yük pompası" gibi çalışırlar. Potansiyelin düşük olduğu uçtan potansiyelin yüksek olduğu uca doğru sürekli olarak yük pompalarlar. Aşağıdaki şekilde, sistemin mekanik eşdeğeri verilmiştir. Buradaki pompa, suyu alçaktaki bir depodan yüksekteki başka bir depoya pompalamaktadır ve elektrik devresindeki emk kaynağına karşılık gelir. Depolar arasındaki boru elektrik devresindeki direnci, depolar da direncin yüksek ve düşük potansiyele sahip uçlarını temsil etmektedir.





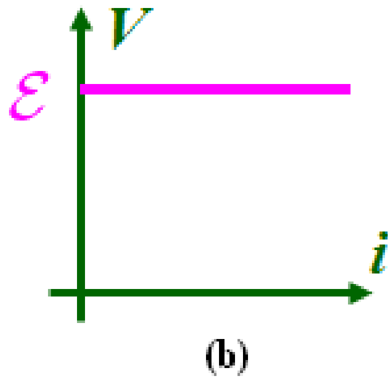




Bir emk kaynağının kutbu, bir ucunda küçük çember olan bir okla gösterilir. Okun yönü kaynağın negatif ucundan pozitif ucuna doğrudur. Bir devreye bağlandığında, kendi içindeki pozitif yükler negatif uçtan pozitif uca doğru akar ve devrede de bir yük akışı oluşmasına sebep olur. Bunu yaparken *dq* yükü üzerinde $dW = \mathcal{E}dq$ ile verilen bir iş yapar. Kaynağın batarya olması durumunda, gerekli enerji batarya içindeki kimyasal reaksiyonlardan; jeneratör olması durumunda, mili çeviren mekanik kuvvetten; güneş pili olması durumunda da güneşten sağlanır. Yandaki devrede, B kaynağında depolanmış kimyasal enerji form değiştirir. Bir kısmı motorda mekanik enerjiye, bir kısmı direnç üzerinde ısıya ve kalan kısmı da A kaynağında kimyasal enerjiye dönüşür.



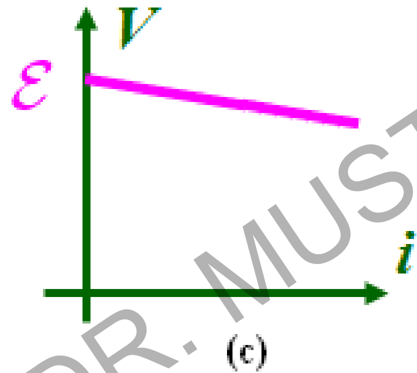

Yandaki devrede (Şekil-$a$), $R$ direnici bir emk kaynağının $a$ ve $b$ uçlarına bağlıdır.

**İdeal Batarya :**



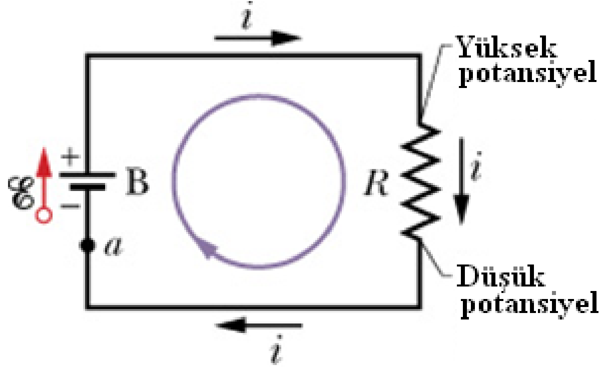

$a$ ve $b$ uçları arasındaki $V$ gerilimi, üzerinden geçen $i$ akımına bağlı değilse emk kaynağı idealdir ($V = \mathcal{E}$) denir (Şekil-$b$).

**Gerçek Batarya :**




$a$ ve $b$ uçları arasındaki $V$ gerilimi, üzerinden geçen $i$ akımıyla azalıyorsa emk kaynağı gerçektir ($V = \mathcal{E} - ir$) denir (Şekil-$c$). Bu ifadedeki $r$, emk kaynağının "iç direnci" dir.

# Tek Halkalı Bir Devredeki Akım:




Şekilde tek halkalı bir devre verilmiştir. Kaynağın ideal ve bağlantı kablolarının ihmal edilebilir dirence sahip olduğunu varsayalım. Devrede saat ibreleri yönünde bir $i$ akımı akar.

$dt$ kadarlık bir zamanda devreden $dq = idt$ kadarlık bir yük akar. Bu durumda batarya $dW = \mathcal{E}dq = \mathcal{E}idt$ ifadesi ile verilen bir iş yapar. Enerjinin korunumu gereği bu enerji direnç üzerinde ısı enerjisi olarak açığa çıkar:

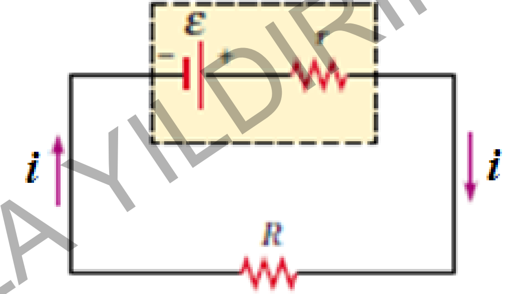
$$\mathcal{E}idt = Ri^2 dt \rightarrow \mathcal{E} = Ri \rightarrow \mathcal{E} - iR = 0$$

Bu son eşitlik, Kirchhoff' un çevrim kuralı olarak bilinir. Daha açık bir ifadeyle;

"Bir elektrik devresindeki herhangi bir çevrim boyunca tüm elemanlar üzerindeki potansiyel değişimlerinin toplamı sıfırdır".

şeklinde tarif edilebilir.

**Örnek :** İç direnci $r = 0.25\ \Omega$ ve emk' sı $\mathcal{E} = 13$ V olan bir batarya, $R = 3\ \Omega$' luk bir direncin uçlarına bağlanmıştır.




$a-)$ Devreden geçen akımı ve bataryanın çıkış gerilimini

$b-)$ Bataryanın devreye sağladığı gücü, dirençler üzerinde birim zamanda açığa çıkan ısı enerjisini hesaplayınız.

$$a-)\ i = \frac{\mathcal{E}}{r+R} = \frac{13}{0.25+3} = 4 \text{ A}$$

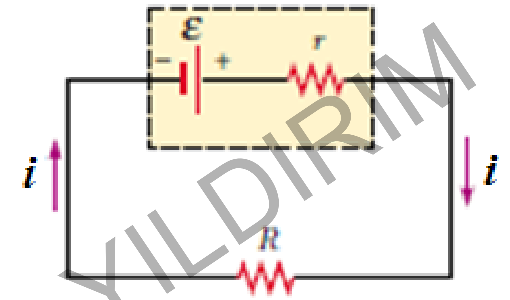
$$V = iR = 4*3 = 12 \text{ V} \quad \text{veya} \quad V = \mathcal{E} - ir = 13 - 4*0.25 = 12 \text{ V}$$

$$b-)\ P_{batarya} = i\mathcal{E} = 4*13 = 52 \text{ W}$$

$$P_R = i^2 R = (4)^2 * 3 = 48 \text{ W}$$

$$P_r = i^2 r = (4)^2 * 0.25 = 4 \text{ W}$$

**Örnek :** İç direnci $r$ ve emk' sı $\mathcal{E}$ olan bir batarya, şekildeki gibi $R$ direncinin uçlarına bağlanmıştır. Hangi $R$ direncinde, üzerinden çekilen güç maksimum olur?




$$P = i^2 R$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r+R} \rightarrow P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \rightarrow \mathcal{E}^2 \left[ \frac{(r+R)^2 - 2(r+R)R}{(r+R)^4} \right] = 0 \rightarrow (r+R) - 2R = 0 \rightarrow R = r$$

$$P_{\max} = \left. \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2} \right|_{R=r} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$$

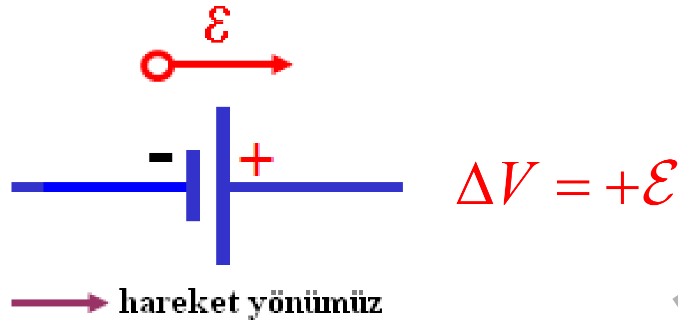
## Direnç Kuralı :



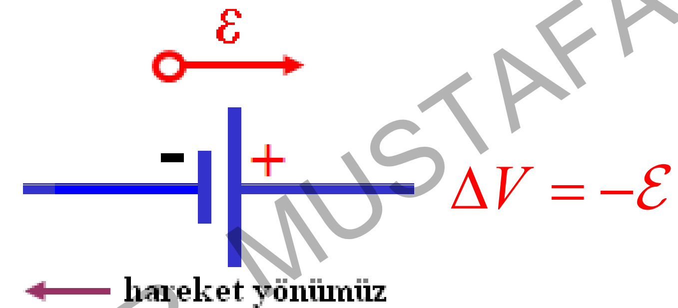

$\Delta V = -iR$




$\Delta V = +iR$




$\Delta V = +\mathcal{E}$




$\Delta V = -\mathcal{E}$

Bir direnç üzerinden geçen akımla **aynı yönde** hareket ediyorsak, direnç üzerindeki potansiyel değişimi:

$\Delta V = -iR$

Bir direnç üzerinden geçen akımla **ters yönde** hareket ediyorsak, direnç üzerindeki potansiyel değişimi:

$\Delta V = +iR$

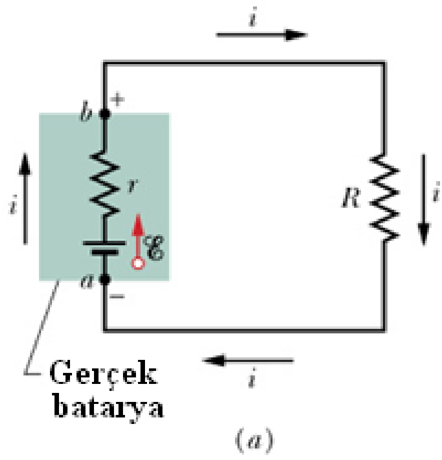
## EMK Kuralı :

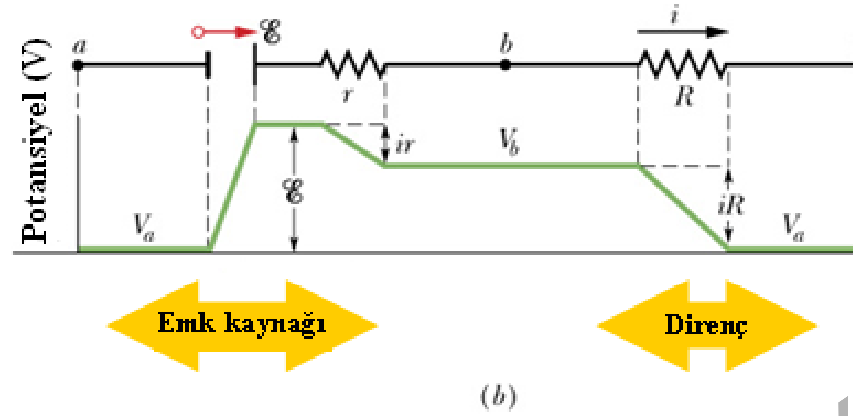
İdeal bir kaynak üzerinde, **emk' nın yönünde** hareket ediyorsak, kaynak üzerindeki potansiyel değişimi:

$\Delta V = +\mathcal{E}$

İdeal bir kaynak üzerinde, **emk' nın tersi yönde** hareket ediyorsak, kaynak üzerindeki potansiyel değişimi:

$\Delta V = -\mathcal{E}$



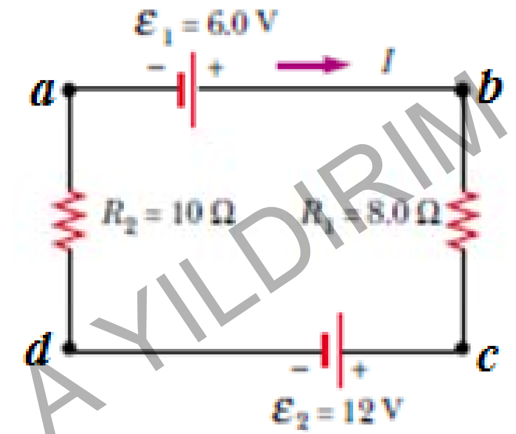

Şekil-*a*' da verilen devreyi ele alalım. Batarya, *r* iç dirençli gerçek bir bataryadır. Bu çevrim için, *a* noktasından başlar ve saat ibreleri yönünde tam bir tur atarak Kirchhoff' un çevrim kuralını uygularsak:

$$\mathcal{E} - ir - iR = 0 \quad \rightarrow \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

buluruz.

Şekil-$b'$ de, *a* noktasından *b* noktasına saat ibreleri yönünde giderken çevrimin her noktasındaki $V$ potansiyeli çizilmiştir. Batarya üzerinde negatif uçtan pozitif uca gittiğimiz için, $\Delta V$ potansiyel değişimi pozitiftir. Akımla aynı yönde hareket ettiğimiz için, her iki direnç üzerindeki $\Delta V$ potansiyel değişim negatiftir.

**Örnek :** Şekilde iki batarya ve iki dirençten oluşan tek halkalı bir devre verilmiştir. Bataryaların iç direçleri ihmal edilebilir. Devreden geçen akımı, dirençlere aktarılan güçleri ve 12 V' luk bataryanın devreye sağladığı gücü hesaplayınız.




$$\sum \Delta V = 0 \rightarrow \mathcal{E}_1 - 8I - \mathcal{E}_2 - 10I = 0 \rightarrow I = \frac{6-12}{18} = -\frac{1}{3}\ \text{A}$$

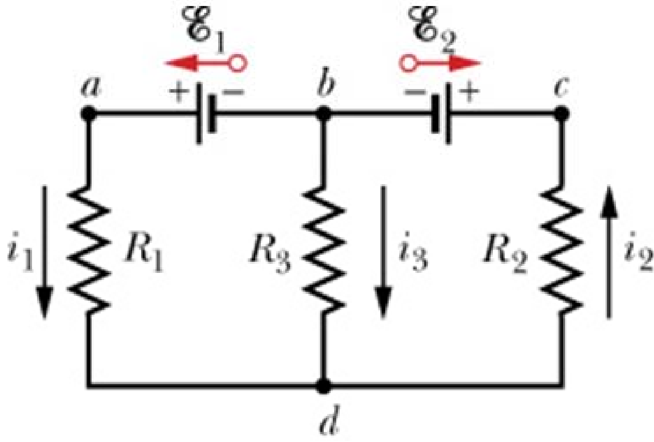
Negatif işaret, akımın ters yönde aktığını göstermektedir.

$$P_{R_1} = I^2 R_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 * 8 = \frac{8}{9} \approx 0.89\ \text{W}$$

$$P_{R_2} = I^2 R_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 * 10 = \frac{10}{9} \approx 1.11\ \text{W}$$

$$P_{\mathcal{E}_2} = I\mathcal{E}_2 = \left(\frac{1}{3}\right) * 12 = 4\ \text{W}$$

# Çok Halkalı Devreler :

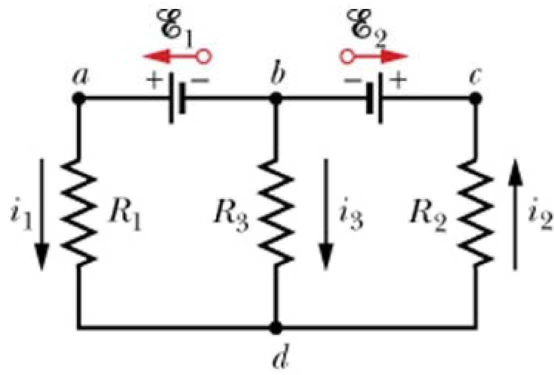



Şekilde iki halkalı bir devre verilmiştir. Bu devre *bad*, *bdc* ve *bd* olmak üzere üç kolludur. Her koldan geçen akıma bir isim verilir ve keyfi bir yön seçilir. Yapılan işlem sonucunda akım için negatif bir değer bulunabilir. Bu durum bize, ilgili akımın yönünü başlangıçta yanlış seçtiğimizi bildirir.

Yukarıdaki devrede *bad, bdc* ve *bd* kollarından geçen akımlara sırasıyla $i_1$, $i_2$ ve $i_3$ isimleri verilmiş ve akımlar için seçilen yönler devre üzerinde gösterilmiştir. *b* ve *d* noktaları birer kavşaktır. Yükün korunumu gereği, *d* noktasına gelen $i_1$ ve $i_3$ akımlarının toplamı $i_2$ akımına eşittir ($i_1 + i_3 = i_2$). Bu, Kirchhoff' un kavşak kuralı olarak bilinir ve daha açık bir ifadeyle;

"Bir kavşağa gelen akımların toplamı, o kavşağı terkeden akımların toplamına eşittir".

şeklinde tarif edilir.




Devredeki $i_1, i_2$ ve $i_3$ akımlarını belirlemek için üç denkleme ihtiyacımız vardır. Bunlardan birincisi, $d$ noktasına uygulanan kavşak kuralından bulunur:

$$i_1 + i_3 = i_2 \qquad \text{(Eş-1)}$$

Diğer iki tanesi de, $bad$ ve $bdc$ halkaları için saat ibrelerinin tersi yönünde hareket edilerek Kirchhoff' un çevrim kuralının uygulanmasıyla bulunur:

$bad$ için: $\mathcal{E}_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 = 0$ (Eş-2)

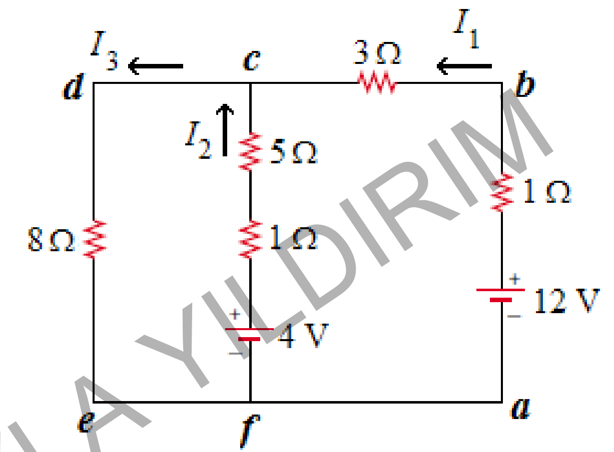
$bdc$ için: $-i_3 R_3 - i_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0$ (Eş-3)

Üç bilinmeyenli bu üç denklemin çözümünden, devredeki $i_1, i_2$ ve $i_3$ akımları bulunabilir. Herhangi bir akımın değerinin negatif bulunması, ilgili akım için başlangıçta seçilen yönün yanlış olduğu anlamına gelir. $abcd$ halkası için de çevrim kuralı uygulanarak dördüncü bir eşitlik daha bulunabilir. Ancak, bu yeni eşitlik bize yeni bir bilgi vermez. Bu yeni eşitlik,

$abcd$ için: $\mathcal{E}_1 - i_1 R_1 - i_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0$ (Eş-4)

ile verilir ve Eş-2 ile Eş-3' ün toplamından başka birşey değildir.

**Örnek :** Yanda verilen devrenin kollarından geçen $I_1$, $I_2$ ve $I_3$ akımlarını, Kirchhoff' un çevrim ve kavşak kurallarını kullanarak bulunuz.




Kirchhoff' un çevrim ve kavşak kurallarından,

*abcf* halkası için: $12 - I_1 - 3I_1 + 5I_2 + I_2 - 4 = 0 \rightarrow 2I_1 - 3I_2 = 4$ (Eş-1)

*fcde* halkası için: $4 - I_2 - 5I_2 - 8I_3 = 0 \rightarrow 3I_2 + 4I_3 = 2$ (Eş-2)

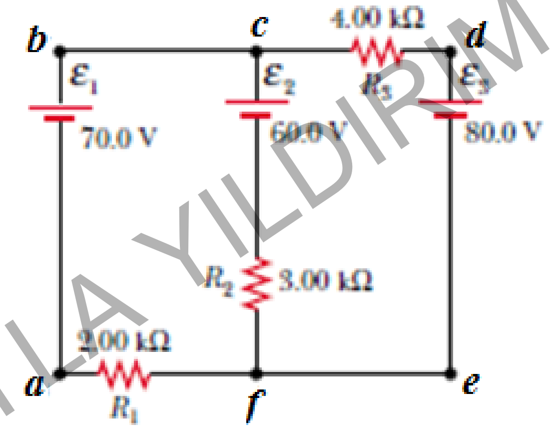
*c* kavşağı için: $I_1 + I_2 = I_3$ (Eş-3)

Eş-1 ve Eş-2' den, $I_1$ ve $I_3$ çekilip Eş-3' te yerine konursa,

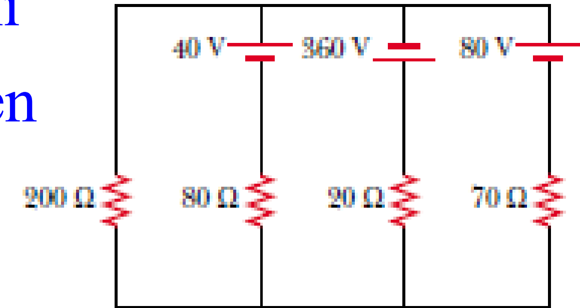
$$I_2 = -\frac{6}{13}\ \text{A} \rightarrow I_1 = \frac{17}{13}\ \text{A} \rightarrow I_3 = \frac{11}{13}\ \text{A}$$

bulunur. $I_1$ ve $I_3$ akımlarının başlangıç yönleri doğru, $I_2$ akımının başlangıç yönü ise ters seçilmiştir.

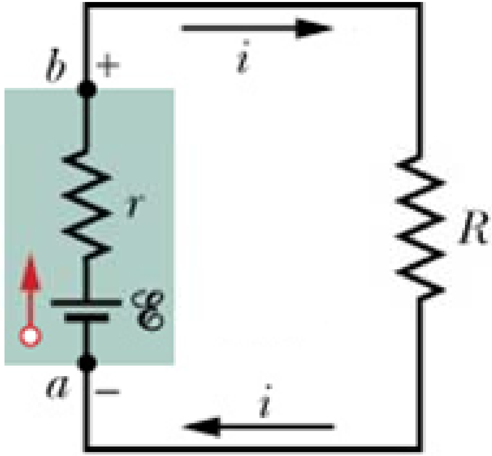
**ÖDEV :** Kirchhoff' un çevrim ve kavşak kurallarını kullanarak, yanda verilen devredeki tüm dirençlerden geçen akımları bulunuz.




**ÖDEV :** Kirchhoff' un çevrim ve kavşak kurallarını kullanarak, yanda verilen devredeki tüm dirençlerden geçen akımları bulunuz. 200 Ω' luk direncin uçları arasındaki potansiyel farkı hesaplayınız.



## Bir Devrede İki Nokta Arasındaki Potansiyel Fark :




Şekildeki tek halkalı devreyi ele alalım. $b$ ve $a$ noktaları arasındaki $V_b - V_a$ potansiyel farkı,

$$V_b - V_a = \left( \begin{array}{l} a \text{ noktasından } b \text{ noktasına hareket ederken,} \\ \text{tüm elemanlar üzerindeki } \Delta V \text{ potansiyel} \\ \text{değişimlerinin toplamı} \end{array} \right)$$

işlemiyle bulunur.

a noktasını b noktasına bağlayan iki farklı yol bulunmaktadır. $V_b - V_a$ potansiyel farkını her iki yönde de hareket ederek bulabiliriz:

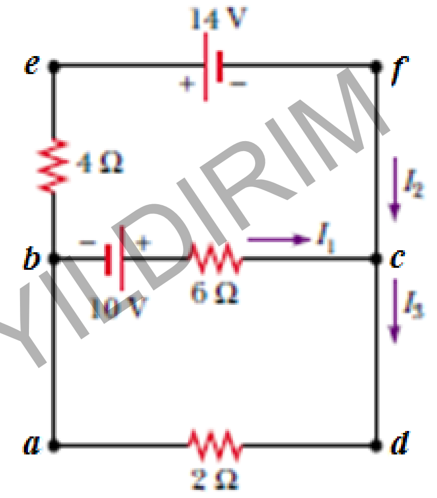
**Saat ibreleri yönünde** : $V_b - V_a = \mathcal{E} - ir$

**Saat ibrelerinin tersi yönünde :** $V_b - V_a = iR$

**Not - 1 :** Bu devre için Kirchhoff' un çevrim kuralı uygulanırsa, $\mathcal{E} - ir - iR = 0$ bulunur. Bu da, $\mathcal{E} - ir = iR$ anlamına gelir.

**Not - 2 :** İki nokta arasındaki potansiyel fark yoldan bağımsızdır.

**Örnek :** Şekilde iki halkalı bir devre verilmiştir. Devredeki kollardan geçen $I_1$, $I_2$ ve $I_3$ akımlarını bulunuz. $a$ ve $c$ noktaları arasındaki potansiyel farkını ($V_{ca} = V_c - V_a$) üç farklı yolu takip ederek hesaplayınız.




Kirchhoff' un çevrim ve kavşak kurallarından,

$abcd$ halkası için: $10 - 6I_1 - 2I_3 = 0 \rightarrow 3I_1 + I_3 = 5$ (Eş-1)

$bcfe$ halkası için: $10 - 6I_1 + 14 + 4I_2 = 0 \rightarrow 3I_1 - 2I_2 = 12$ (Eş-2)

$c$ kavşağı için: $I_1 + I_2 = I_3$ (Eş-3)

Eş-1 ve Eş-2' den, $I_2$ ve $I_3$ çekilip Eş-3' te yerine konursa,

$I_1 = 2 \text{ A} \rightarrow I_2 = -3 \text{ A} \rightarrow I_3 = -1 \text{ A}$

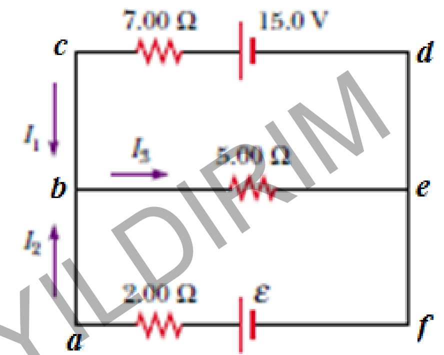
bulunur. $I_1$ akımının başlangıç yönü doğru, $I_2$ ve $I_3$ akımlarının başlangıç yönleri ise ters seçilmiş.

$adc$ yolu: $V_a + 2I_3 = V_c \rightarrow V_c - V_a = 2I_3 = 2(-1) = -2 \text{ V}$

$abc$ yolu: $V_a + 10 - 6I_1 = V_c \rightarrow V_c - V_a = 10 - 6I_1 = 10 - 6(2) = -2 \text{ V}$

$abefc$ yolu: $V_a - 4I_2 - 14 = V_c \rightarrow V_c - V_a = -14 - 4I_2 = -14 - 4(-3) = -2 \text{ V}$

**Örnek :** Şekilde iki halkalı bir devre verilmiştir. *be* kolundan geçen $I_3$ akımı 2 A olduğuna göre, diğer kollardan geçen $I_1$ ve $I_2$ akımını, *af* kolu üzerindeki bataryanın emk' sını bulunuz. *a* ve *d* noktaları arasındaki potansiyel farkını ($V_{da} = V_d - V_a$) üç farklı yolu takip ederek hesaplayınız.




Kirchhoff' un çevrim ve kavşak kurallarından,

*befa* halkası için: $-5I_3 + \mathcal{E} - 2I_2 = 0 \rightarrow \mathcal{E} - 2I_2 = 10$ (Eş-1)

*bedc* halkası için: $-5I_3 + 15 - 7I_1 = 0 \rightarrow 7I_1 = 15 - 10 \rightarrow I_1 = \frac{5}{7}$ A

*b* kavşağı için: $I_1 + I_2 = I_3 = 2$ (Eş-2)

$I_1$' in değeri Eş-2' de kullanılırsa: $I_1 + I_2 = 2 \rightarrow I_2 = 2 - (\frac{5}{7}) = \frac{9}{7}$ A

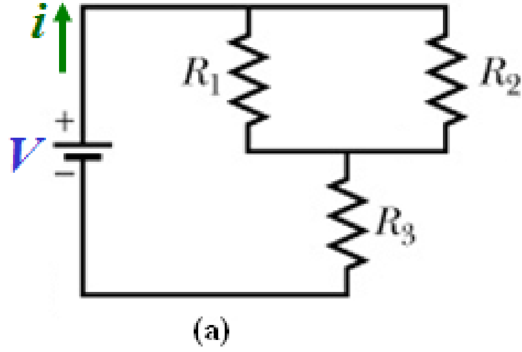
$\mathcal{E} - 2I_2 = 10 \rightarrow \mathcal{E} = 10 + 2(\frac{9}{7}) = \frac{88}{7}$ V bulunur.

*afed* yolu: $V_a + 2I_2 - \mathcal{E} = V_d \rightarrow V_d - V_a = 2(\frac{9}{7}) - \frac{88}{7} = -10$ V

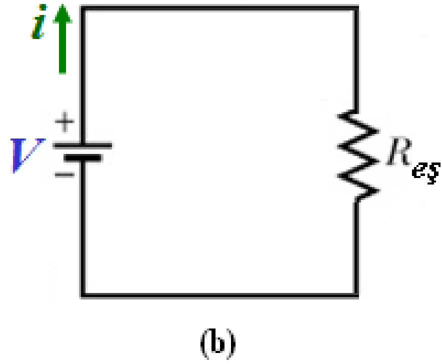
*abed* yolu: $V_a - 5I_3 = V_d \rightarrow V_d - V_a = -5(2) = -10$ V

*abcd* yolu: $V_a + 7I_1 - 15 = V_d \rightarrow V_d - V_a = 7(\frac{5}{7}) - 15 = -10$ V

# Eşdeğer Direnç :



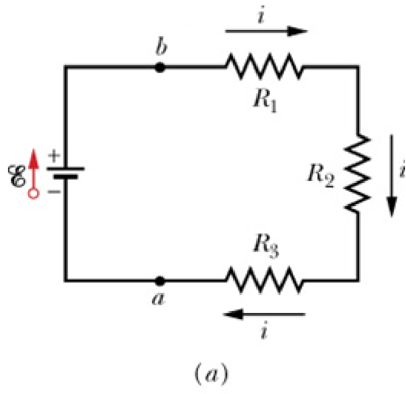
(a)



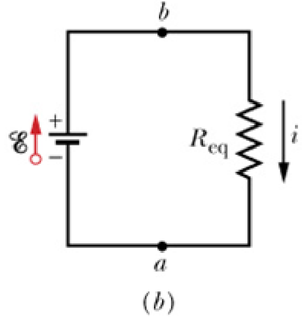
(b)

Yanda, birbirine farklı şekilde bağlanmış üç adet dirençten oluşmuş bir devre verilmiştir. Üç adet direnç içeren bu gruba elektriksel olarak eşdeğer tek bir direnç $\left(R_{eş}\right)$ bağlayabiliriz. Bunun anlamı, şekil-*a*' da direnç grubunun uçları arasına uygulanan $V$ gerilimi, şekil-*b*' deki $R_{eş}$ direncinin uçları arasına uygulanırsa batarya aynı $i$ akımını sağlar. Başka bir deyimle, üçlü direnç grubu $(R_1, R_2, R_3)$ ve eşdeğer direnç $(R_{eş})$ kapalı kutular içine alınırsa, bu devrelerde yapılacak elektriksel ölçümlerle bunları birbirinden ayırd etmek imkansızdır.

# Seri Bağlı Dirençler :



(a)



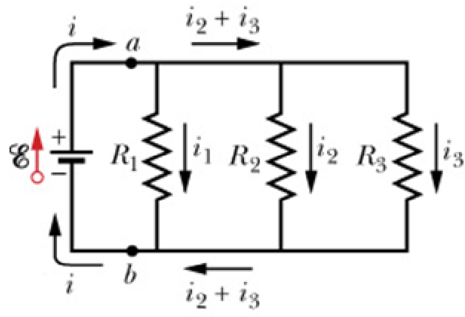
(b)

Şekil-*a*' da, seri bağlı üç dirençten oluşan bir devre verilmiştir. Bu dirençlerden **aynı** *i* akımı geçer. Üzerlerindeki gerilimlerin toplamı kaynağının gerilimine eşittir ($V_1 + V_2 + V_3 = \mathcal{E}$). Şekil-*b*'de seri bağlı üç dirence eşdeğer tek dirençli bir devre verilmiştir. Her iki devre için de, başlangıç noktası *a* seçilir ve saat ibreleri yönünde Kirchhoff' un çevrim kuralı uygulanırsa:

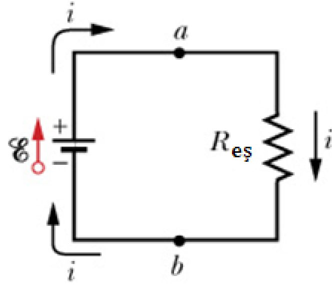
$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E} - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0 \rightarrow i = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \mathcal{E} - iR_{eş} = 0 \rightarrow i = \dfrac{\mathcal{E}}{R_{eş}} \end{array}\right\} \rightarrow R_{eş} = R_1 + R_2 + R_3$$

bulunur. *n* tane direncin seri bağlanması durumunda ise eşdeğer direnç:

$$R_{eş} = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$ ifadesine sahip olur.



(a)



(b)

## Paralel Bağlı Dirençler :

Şekil-*a*' da paralel bağlı bağlı üç dirençten oluşan bir devre verilmiştir. Dirençlerin uçları arasındaki gerilimler **aynı** ($\mathcal{E}$), üzerlerinden geçen akımların toplamı ise emk kaynağının sağladığı akıma eşittir ($i_1 + i_2 + i_3 = i$). Şekil-*b*' de paralel bağlı üç dirence eşdeğer tek dirençli bir devre verilmiştir. Her iki devre için de *a* noktasında Kirchhoff' un kavşak kuralı uygulanırsa,

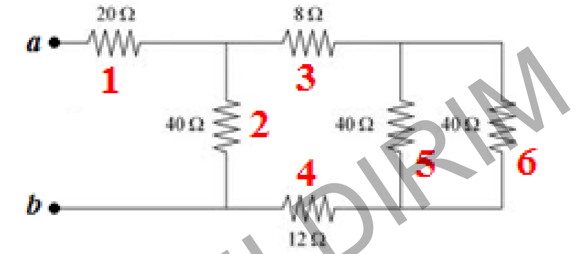
$$\left( i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1};\ i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2};i_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3} \right)$$ olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} i &= \mathcal{E}\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ i &= \frac{\mathcal{E}}{R_{eş}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

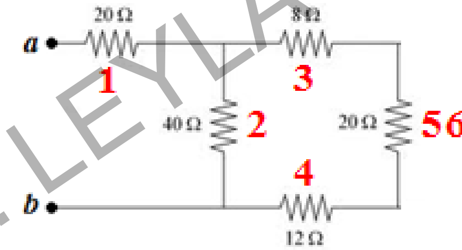
bulunur. *n* tane direncin paralel bağlanması durumunda ise eşdeğer direnç:

$$\frac{1}{R_{eş}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$ ifadesine sahip olur.

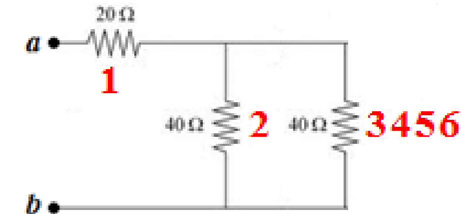
**Örnek :** Şekilde verilen devrenin, *a* ve *b* uçları arasındaki eşdeğer direncini bulunuz.



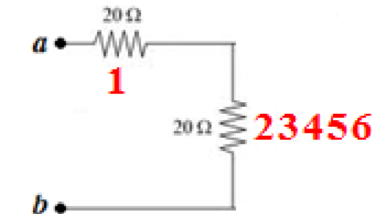

5 ve 6 nolu dirençler paralel: $R_{56} = 20\ \Omega$




3, 4 ve $R_{56}$ dirençleri birbirine seri: $R_{3456} = 40\ \Omega$

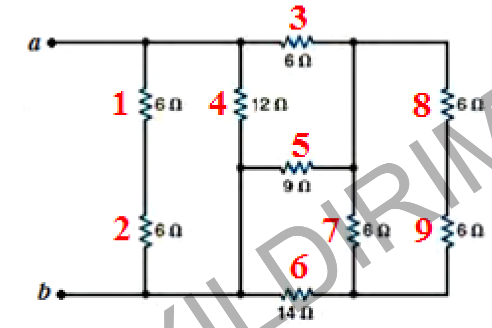



2 ve $R_{3456}$ dirençleri paralel: $R_{23456} = 20\ \Omega$




1 ve $R_{23456}$ dirençleri seri: $R_{ab} = 40\ \Omega$

**Örnek :** Şekilde verilen devrenin, *a* ve *b* uçları arasındaki eşdeğer direncini bulunuz.




$(1 \text{ ile } 2)$ ve $(8 \text{ ile } 9)$ nolu dirençler seri:

$$R_{12} = 12\ \Omega \text{ ve } R_{89} = 12\ \Omega$$

$(4 \text{ ile } R_{12})$ ve $(7 \text{ ile } R_{89})$ dirençleri paralel:

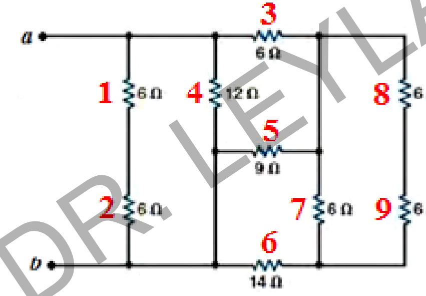
$$R_{124} = 6\ \Omega \text{ ve } R_{789} = 4\ \Omega$$

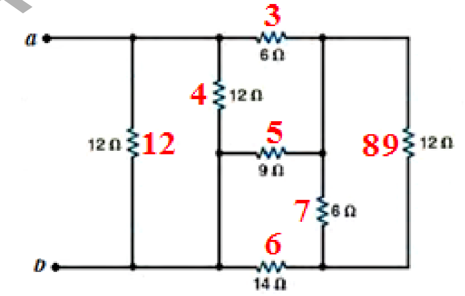
6 ve $R_{789}$ dirençleri seri: $R_{6789} = 18\ \Omega$

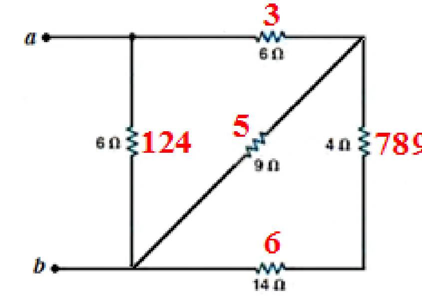
5 ve $R_{6789}$ dirençleri paralel: $R_{56789} = 6\ \Omega$

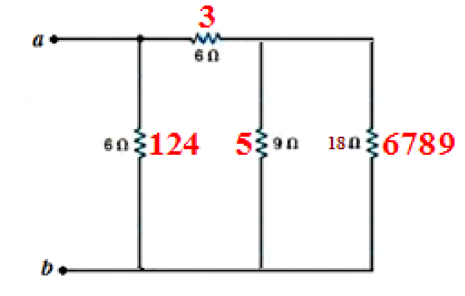
3 ve $R_{56789}$ dirençleri seri: $R_{356789} = 12\ \Omega$

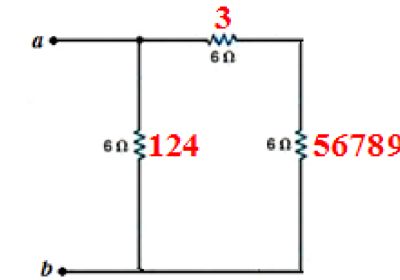
$R_{124}$ ve $R_{356789}$ paralel: $R_{ab} = 4\ \Omega$

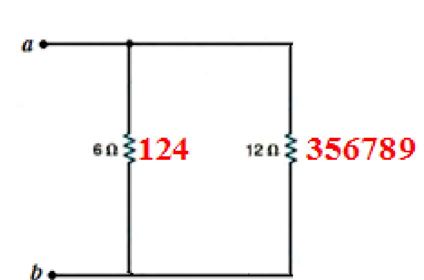


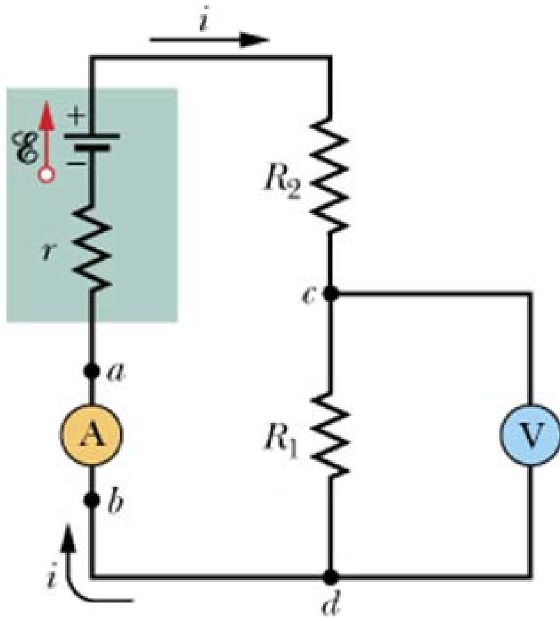



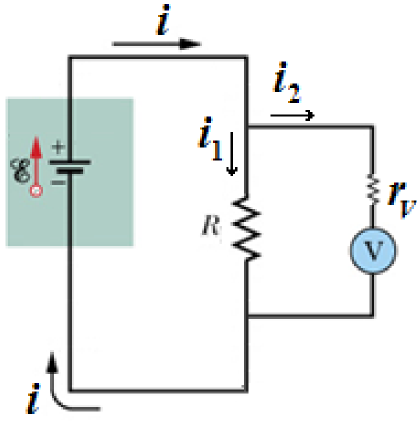



## Ampermetre ve Voltmetre :

Ampermetre, akım ölçmeye yarayan bir cihazdır. Bir iletkenden geçen akımı ölçmek için, iletken belli bir yerinden kesilir ve kesilen bu uçlar ampermetrenin giriş ve çıkış uçlarına bağlanır. Böylece, iletkendeki akımın ampermetre üzerinden akması sağlanmış olur. Yandaki devrede ampermetre, iletken üzerindeki *a* ve *b* noktaları arasına yerleştirilmiştir.

Ampermetrenin iç direnci ($r_A$), devredeki diğer dirençlerden çok küçük olmalıdır $\left( r_A \ll R_1 \text{ ve } r_A \ll R_2 \right)$.

Voltmetre ise, bir devrede herhangi iki nokta arasındaki potansiyel farkını ölçen bir cihazdır. Yukarıdaki devrede voltmetre $R_1$ direncinin iki ucuna ($c$ ve $d$ noktaları) bağlanmıştır. Voltmetrenin iç direnci ($r_V$), devredeki diğer dirençlerden çok büyük olmalıdır $\left( r_V \gg R_1 \text{ ve } r_V \gg R_2 \right)$.



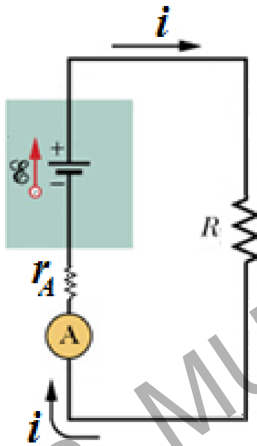

## Voltmetre:

Voltmetre bağlı değilken: $V_{gerçek} = iR$

Voltmetre bağlandıktan sonra, $i$ akımının bir kısmı voltmerenin bulunduğu koldan akacaktır. Kirchhoff' un çevrim ve kavşak kurallarından:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 R = i_2 r_V \\ i_1 + i_2 = i \end{array}\right\} \rightarrow i_1 = \left(\frac{r_V}{R + r_V}\right) i \rightarrow V = i_1 R = \left(\frac{r_V}{R + r_V}\right) iR = \left(\frac{r_V}{R + r_V}\right) V_{gerçek}$$

Voltmetrenin gerçek gerilimi ölçmesi için: $r_V \gg R$ olmalıdır.




## Ampermetre:

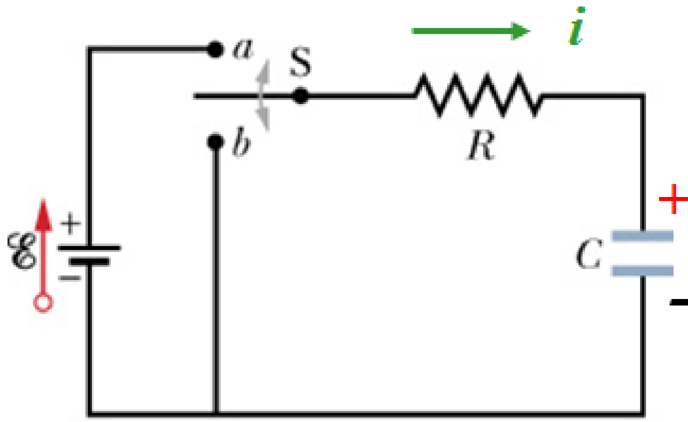
Ampermetre bağlı değilken: $i_{gerçek} = \dfrac{\varepsilon}{R}$

Ampermetre bağlandıktan sonra, devreden geçen akım:

$$i = \frac{\varepsilon}{R + r_A} = \left(\frac{R}{R + r_A}\right) i_{gerçek}$$

Ampermetrenin gerçek akımı ölçmesi için: $r_A \ll R$ olmalıdır.

## RC Devresi : Bir Kapasitörün Dolması :

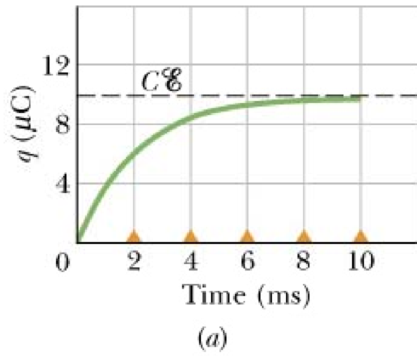



Yanda verilen devreyi ele alalım. $t=0$ anında kapasitörün boş olduğunu ve S anahtarının $a$ noktasına temas ettirildiğini kabul edelim. Böylece, batarya kapasitörü $R$ direnci üzerinden yüklemeye başlar.

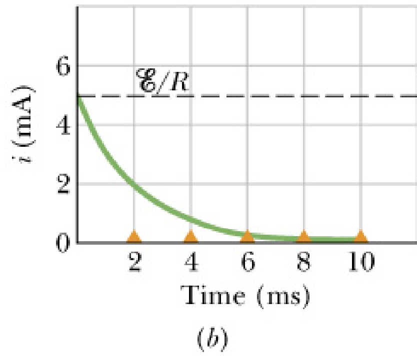
Buradaki amacımız, kapasitörde biriken yükü zamanın bir fonksiyonu olarak bulmaktır. Bunun için, bataryadan negatif ucundan başlar ve saat ibreleri yönünde hareket ederek çevrim kuralını uygularsak:

$$\mathcal{E}-iR-\frac{q}{C}=0 \;\rightarrow\; \mathcal{E}-\frac{dq}{dt}R-\frac{q}{C}=0 \;\rightarrow\; \frac{dq}{dt}R+\frac{q}{C}=\mathcal{E}$$

eşitliği elde edilir ($i=dq/dt$). Bu eşitlik, homojen olmayan birinci dereceden lineer bir diferansiyel denklemdir.



(a)



(b)

$$\frac{dq}{dt}R = \mathcal{E} - \frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}C - q}{C} \rightarrow \frac{dq}{\mathcal{E}C - q} = \frac{dt}{RC} \rightarrow \int_0^q \frac{dq}{\mathcal{E}C - q} = \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{\mathcal{E}C - q}{\mathcal{E}C}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

çözümü elde edilir. Burada $\tau = RC$' dir ve devrenin "zaman sabiti" olarak tanımlanır. Bu süre içinde kapasitördeki yük maksimum değerinin 0.632 katına ulaşır. Bir diğer nicelik ise, $T_{1/2} = RC\ln(2)$ eşitliği ile tanımlanan "yarılanma zamanı" dır ve kapasitörün yarı yarıya dolması için geçen süre olarak tanımlanır. Kapasitör üzerinde biriken yükün zamana bağlı değişimi şekil-$a$' da verilmiştir.

Devreden geçen akım ise,

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/\tau}$$

ile verilir ve zamana bağlı değişimi şekil-$b$' deki gibidir. $t = 0$ anında devredeki akım maksimumdur ve kapasitörde yük biriktikçe azalır. Devrenin zaman sabiti $\tau = RC$ ve yarılanma süresi $T_{1/2}$ aynıdır. Akımın, maksimum değerinin 1/e' sine düşmesi için geçen süre $\tau$, yarısına düşmesi için geçen süre $T_{1/2}$ olarak tanımlanır.

**Örnek :** Sığası $C$ olan yüksüz bir kapasitör, emk' sı $\mathcal{E}$ olan bir batarya ile, şekildeki gibi, $R$ direnci üzerinden yükleniyor. $C = 5\ \mu\text{F}$, $R = 8\times10^5\ \Omega$ ve $\mathcal{E} = 12$ V olduğuna göre, devrenin zaman sabitini, yarılanma süresini, kapasitördeki maksimum yükü ve devredeki maksimum akımı bulunuz. Anahtar kapatıldıktan $\tau$ kadar sonra, kapasitördeki yük ve devredeki akım ne olur?




$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{ve} \quad i(t) = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC = \left(8\times10^5\right)*\left(5\times10^{-6}\right) = 4\ \text{s}$$

$$T_{1/2} = RC\ln 2 = 4\ln 2 = 2.77\ \text{s}$$

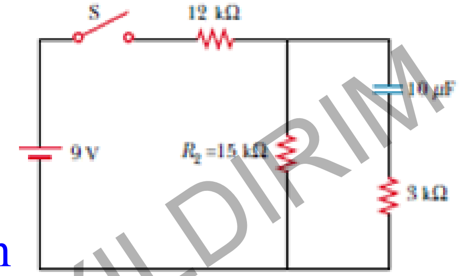
$$q_{\text{max}} = \mathcal{E}C = 12\left(5\times10^{-6}\right) = 60\ \mu\text{C}$$

$$i_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12}{8\times10^5} = 1.5\times10^{-5}\ \text{A} = 15\ \mu\text{A}$$

$$q(t) = 12\left(5\times10^{-6}\right)\left(1 - e^{-\tau/\tau}\right) = 60\times10^{-6}\left(1 - e^{-1}\right) = 37.9\ \mu\text{C}$$

$$i(t) = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-\tau/\tau} = \frac{12}{8\times10^5}e^{-1} = 0.552\times10^{-5} = 5.52\ \mu\text{A}$$

**Örnek :** Yanda verilen devredeki S anahtarı, kapasitör tamamen doluncaya kadar tutulsun. Her direnç üzerindeki kararlı akımı ve kapasitör üzerindeki yükü bulunuz. $t = 0$ anında anahtar açılırsa, $R_2$ direnci üzerinden geçen akımı zamanın fonksiyonu olarak bulunuz ve kapasitör üzerindeki yükün maksimum değerinin 1/5' ine düşmesi için geçen süreyi hesaplayınız.




Devre kararlı duruma ulaştığında, kapasitörün bulunduğu koldan akım geçmez. 12 kΩ ve $R_2$ dirençleri üzerinden aynı akım geçer:

$$i = \frac{9}{27\times10^3} = \frac{1}{3}\times10^{-3} = 0.33 \text{ mA}$$

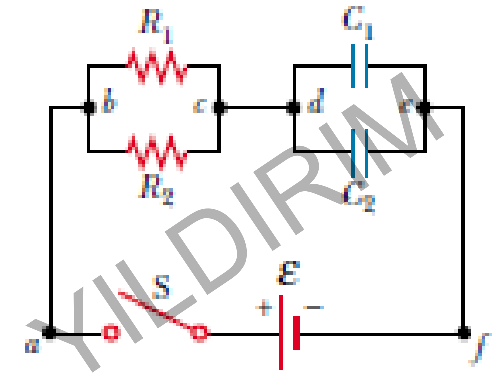
$$V_C = iR_2 = \frac{q_m}{C} \rightarrow q_m = \left(\frac{1}{3}\times10^{-3}\right)*\left(15\times10^3\right)*\left(10\times10^{-6}\right) = 50\ \mu\text{C}$$

$t = 0$ anında anahtar açılırsa, kapasitör birbirine seri bağlı 15 kΩ ve 3 kΩ' luk dirençler üzerinden boşalacaktır.

$$q(t) = q_m e^{-t/R_{eş}C} \rightarrow i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_m}{R_{eş}C} e^{-t/R_{eş}C}$$

$$\frac{q_m}{5} = q_m e^{-t/R_{eş}C} \rightarrow t = R_{eş}C \ln 5 = \left(18\times10^3\right)*\left(10\times10^{-6}\right)\ln 5 = 290\times10^{-3} = 0.29 \text{ ms}$$

**Örnek :** Yandaki devre, sığaları $C_1 = 2\ \mu$F ve $C_2 = 3\ \mu$F olan iki kapasitör, dirençleri $R_1 = 2$ kΩ ve $R_2 = 3$ kΩ olan iki direnç ve emk' sı $\mathcal{E} = 120$ V olan bir bataryadan oluşmuştur. Kapasitörler başlangıçta boştur ve $t = 0$ anında S anahtarı kapatılıyor. Kararlı denge durumunda, kapasitörler üzerindeki $q_1$ ve $q_2$ yüklerini bulunuz.




$R_1$ ve $R_2$ dirençleri paralel: $\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_{eş} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.2$ kΩ

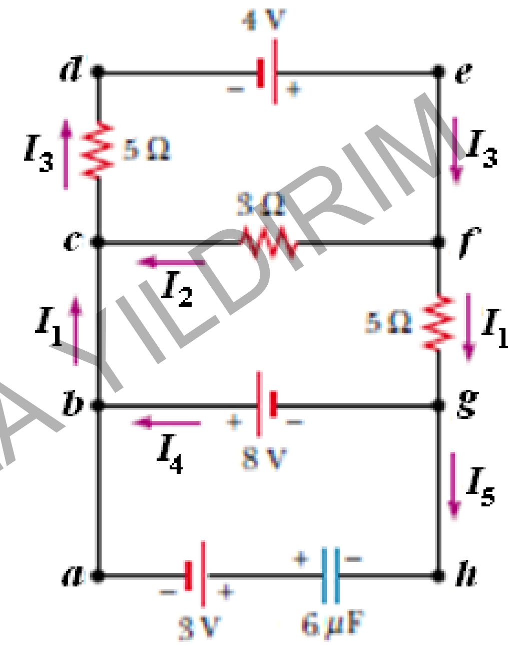
$C_1$ ve $C_2$ kapasitörleri paralel: $C_{eş} = C_1 + C_2 \rightarrow C_{eş} = 5\ \mu$F

Devre, sığası $C_{eş} = 5\ \mu$C ve direnci $R_{eş} = 1.2$ kΩ olan basit bir RC devresidir.

Kapasitör üzerindeki maksimum yük: $q_m = \mathcal{E} C_{eş} = 120\left(5\times 10^{-6}\right) = 600\ \mu$C

$$\left.\begin{aligned} q_1 + q_2 &= q_m \\ \frac{q_1}{C_1} &= \frac{q_2}{C_2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} q_1 &= \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) q_m = 0.4\times 600 = 240\ \mu\text{C} \\ q_2 &= \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right) q_m = 0.6\times 600 = 360\ \mu\text{C} \end{aligned}$$

**Örnek :** Kararlı denge durumunda, yandaki devrede gösterilen tüm akımları hesaplayınız. Kapasitör üzerindeki maksimum yük ne kadardır?




Devre kararlı duruma ulaştığında, kapasitörün bulunduğu koldan akım geçmez. Yani, $I_5 = 0$ ve $I_4 = I_1$ olur.

Kirchhoff' un çevrim ve kavşak kurallarından,

*defc* halkası için: $4 - 3I_2 - 5I_3 = 0 \rightarrow 3I_2 + 5I_3 = 4$ (Eş-1)

*gbcf* halkası için: $8 + 3I_2 - 5I_1 = 0 \rightarrow 5I_1 - 3I_2 = 8$ (Eş-2)

*c* kavşağı için: $I_1 + I_2 = I_3$ (Eş-3)

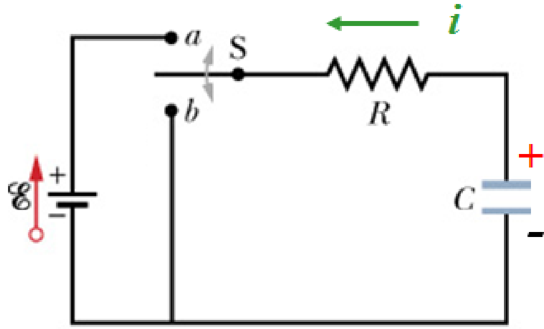
Eş-1' den $I_3$ ve Eş-2' den $I_1$ çekilip Eş-3' te yerine konursa:

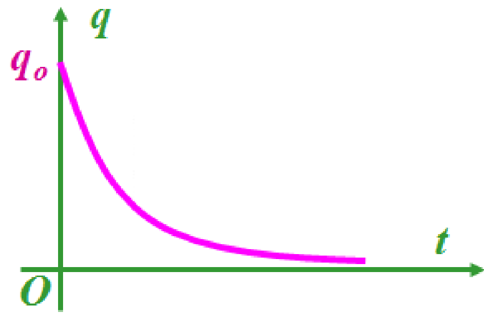
$$\frac{8 + 3I_2}{5} + I_2 = \frac{4 - 3I_2}{5} \rightarrow I_2 \frac{11}{5} = -\frac{4}{5} \rightarrow I_2 = -\frac{4}{11} \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{8 + 3I_2}{5} = \frac{8 + 3\left(-\frac{4}{11}\right)}{5} = \frac{76}{55} \text{ A} \quad \text{ve} \quad I_3 = \frac{4 - 3I_2}{5} = \frac{4 - 3\left(-\frac{4}{11}\right)}{5} = \frac{56}{55} \text{ A}$$

*ahgb* halkası için: $3 - \frac{q_m}{C} + 8 = 0 \rightarrow q_m = 11C = 11 * \left(6 \times 10^{-6}\right) = 66 \ \mu\text{C}$

# RC Devresi : Bir Kapasitörün Boşalması :




Yanda verilen devreyi ele alalım. $t=0$ anında kapasitördeki yükün $q_0$ olduğunu varsayalım ve S anahtarının $b$ noktasına temas ettirildiğini kabul edelim. Böylece, bataryadan ayrılan kapasitör $R$ direnci üzerinden boşalmaya başlar. Başlangıcı $b$ noktası seçer ve saat ibreleri yönünde hareket ederek çevrim kuralını uygularsak:

$$iR-\frac{q}{C}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{dt}R+\frac{q}{C}=0 \quad \left(i=-\frac{dq}{dt} \text{ alınmıştır!!!}\right)$$

Bu eşitlik, birinci dereceden, homojen, lineer bir diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{q}{RC} \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{q}=-\frac{dt}{RC} \quad \rightarrow \quad \int_{q_0}^{q}\frac{dq}{q}=-\int_{0}^{t}\frac{dt}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{q}{q_0}\right)=-\frac{t}{RC} \quad \rightarrow \quad q(t)=q_0 e^{-t/\tau}$$

Kapasitör üzerindeki yük eksponansiyel olarak azalmakta ve $t\rightarrow\infty$ durumunda sıfıra ulaşmaktadır. Devrenin zaman sabiti $\tau=RC$ ve yarılanma süresi $T_{1/2}$ aynıdır.

**Örnek :** Sığası C olan bir kapasitörün R direnci üzerinden boşaldığını varsayalım.

*a*–) Kapasitördeki yük ne kadar zamanda maksimum değerinin 1/4' üne düşer.

*b*–) Kapasitördeki enerji ne kadar zamanda maksimum değerinin 1/4' üne düşer.

$$a\text{–)}\ q(t) = q_m e^{-t/RC} \rightarrow \frac{q_m}{4} = q_m e^{-t/RC} \rightarrow -\ln 4 = -\frac{t}{RC}$$

$$t = RC\ln 4 = 1.39RC = 1.39\tau$$

$$b\text{–)}\ U(t) = \frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C} \rightarrow U(t) = \frac{q_m^2 e^{-2t/RC}}{2C} \rightarrow \frac{q_m^2}{4(2C)} = \frac{q_m^2 e^{-2t/RC}}{2C}$$

$$-\ln 4 = -\frac{2t}{RC} \rightarrow t = \frac{RC}{2}\ln 4 = RC\ln 2 = 0.693RC = 0.693\tau$$

**Örnek :** Sığası $C$ olan bir kapasitör emk' sı $\mathcal{E}$ olan batarya ile yükleniyor ve daha sonra da, bataryadan sökülüp bir $R$ direnci üzerinden boşaltılıyor. Kapasitör tamamen boşalıncaya kadar, $R$ direnci üzerinde açığa çıkan ısı enerjisi miktarı ne kadardır?

Kapasitör boşalırken:

$$q(t) = q_m e^{-t/RC} = \mathcal{E} C e^{-t/RC} \quad \rightarrow \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

$$dE_{ısı} = i(t)^2 R dt \rightarrow E_{ısı} = \int_0^{\infty} i(t)^2 R dt = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 R \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt \quad ; \quad \begin{aligned} u &= -2t/RC \\ du &= -2dt/RC \end{aligned}$$

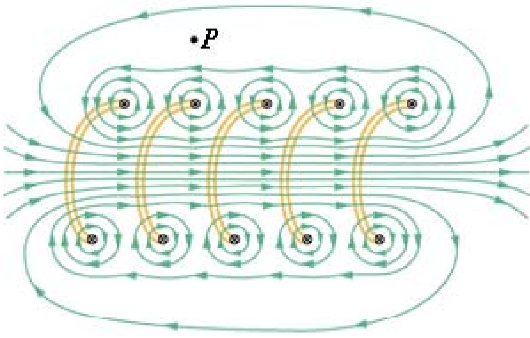
$$E_{ısı} = -\frac{\mathcal{E}^2}{R}\frac{RC}{2}\int_0^{\infty} e^u du = -\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left[e^{e^{-2t/RC}}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

# BÖLÜM-28
# Manyetik Alan

Bu bölümde aşağıda listelenen konulara değinilecektir:

**Manyetik alan vektörü** $\left(\vec{B}\right)$**,**
**Hareket eden yüklü parçacığa etkiyen manyetik kuvvet** $\left(\vec{F}_B\right)$**,**
**Manyetik alan çizgileri**
**Düzgün manyetik alanda yüklü parçacığın hareketi**
**Akım taşıyan tele etkiyen manyetik kuvvet**
**Akım halkasına etki eden tork**
**Manyetik dipol, manyetik dipol moment** $\left(\vec{\mu}\right)$**,**
**Hall etkisi**
**Parçacık hızlandırıcı: Cyclotron** *(zorunlu değil)*

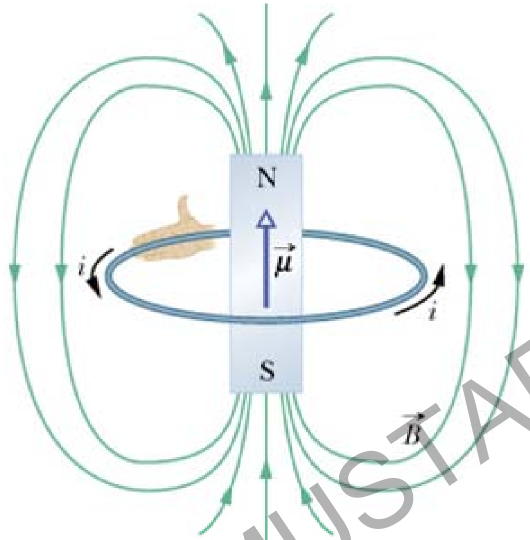
# Manyetik Alanın Kaynağı :



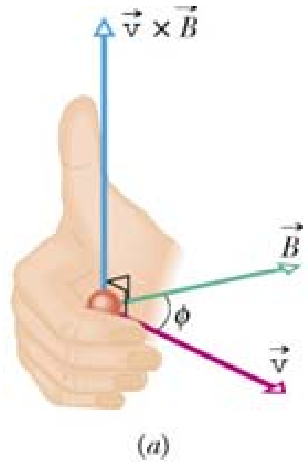

Manyetik alan oluşturmanın iki yolu vardır:

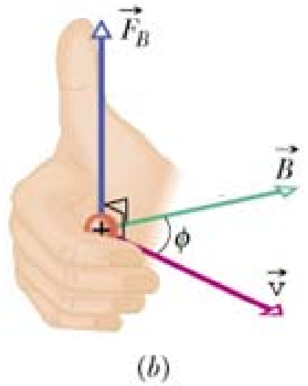
İçinden elektrik akımı geçirilen iletken tel (elektromagnet)

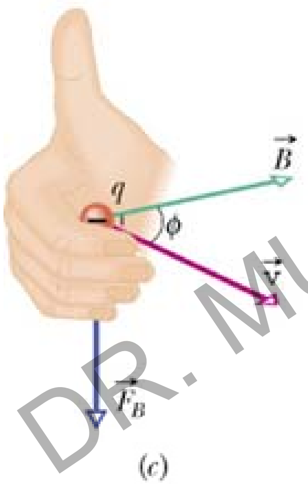
Kalıcı mıknatıslanmaya sahip malzemeler (mıknatıs)




Hem elektromagnet hem de mıknatıs ince demir tozlarını çeker. Merkezinden dik geçen eksen etrafında serbestçe dönebilen hafif bir çubuk mıknatıs, kendisini Güney-Kuzey doğrultusunda yönlendirecek şekilde döner (pusula). Hem akım taşıyan tel hem de mıknatıs, çevrelerinde "manyetik alan" ($\vec{B}$) oluşturur ve kendilerini "manyetik kuvvet" ($\vec{F}_B$) uygulayarak hissettirirler.



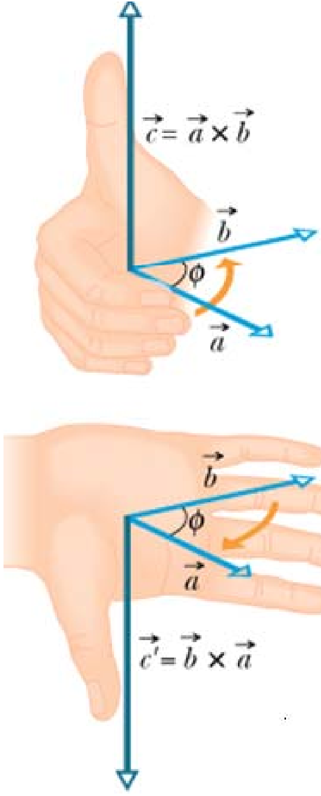




# $\vec{B}$ Manyetik Alanının Tanımı :

Manyetik alan vektörü, $\vec{v}$ hızına sahip bir $q$ yüküne uyguladığı $\vec{F}_B$ manyetik kuvveti cinsinden tanımlanır. $q$ yüküne sahip parçacık gelişigüzel doğrultularda $\vec{B}$ manyetik alanına gönderilir ve manyetik alan içinde izlediği yollara bakılır. $q$ yüküne etkiyen $\vec{F}_B$ kuvvetinin sıfir olduğu tek bir doğrultu vardır. $\vec{B}$ manyetik alanı bu doğrultuya paraleldir. Bunun dışındaki tüm doğrultularda $\vec{F}_B$ kuvveti sıfırdan farklıdır ve büyüklüğü $F_B = |q| vB \sin\phi$ ile verilir. Burada $\phi$, $\vec{v}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açıdır. Vektörel olarak bu kuvvet $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ ifadesine sahiptir ve sağ-el kuralına göre, $\vec{v}$ ile $\vec{B}$' nin oluşturduğu düzleme diktir. Manyetik alanın SI sistemindeki birimi:

$$\frac{\text{N}}{\text{C}\cdot(\text{m/s})} = \frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}} = \text{tesla}$$




# Vektörel Çarpma :

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki vektörel çarpma işlemi, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ile verilen yeni bir vektör oluşturur. $\vec{c}$ vektörünün büyüklüğü $c = ab\sin\phi$ ile verilir ve $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir. Yönü "sağ-el-kuralı" ile belirlenir:

i. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin başlangıç noktalarını birleştiriniz.

ii. $\vec{a}$ vektörünü parmak uçlarınız onun yönünü gösterecek şekilde sağ avuç içine yatırınız.

iii. $\vec{a}$ vektörünü küçük açı yönünde $\vec{b}$'nin üzerine süpürünüz.

iv. Başparmağınız $\vec{c}$ vektörünün yönünü verir.

Vektörel çarpım, "cross" çarpım olarak da bilinir.

## Bileşenleri Cinsinden Vektörel Çarpma :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\right)\times\left(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0\\ \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ;\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}\\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}\ ;\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}\\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ;\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}\end{array}\right\}\text{olduğundan}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\hat{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{k}$$

**Not :** $\vec{a}\times\vec{b}$, aşağıdaki determinant yolu ile de belirlenebilir.

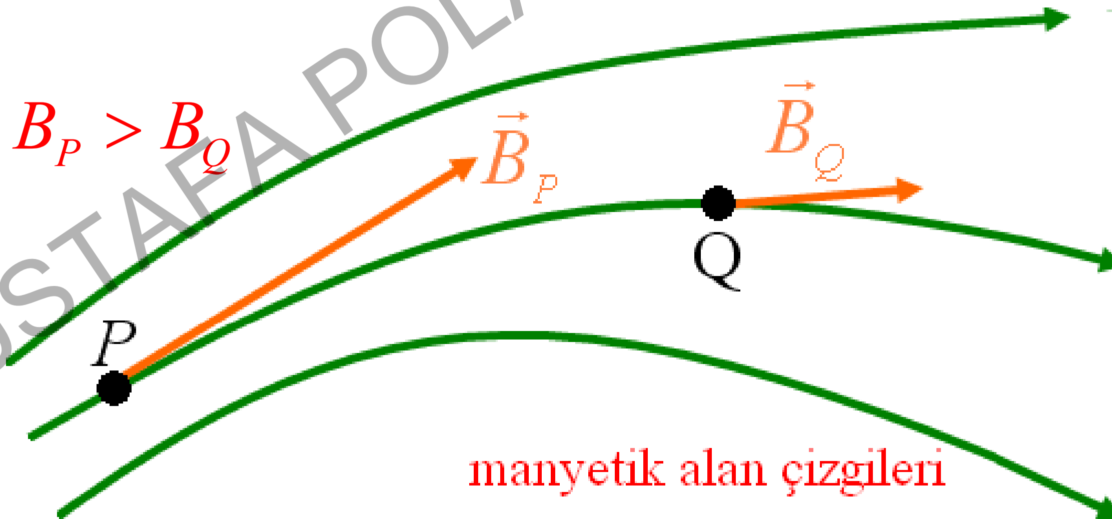
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\quad ;\quad \textbf{Not :}\ \vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$$

**Manyetik Alan Çizgileri :** Elektrik alan ile elektrik alan çizgileri arasındaki ilişki gibi, manyetik alan ile manyetik alan çizgileri arasında da benzer bir ilişki vardır:

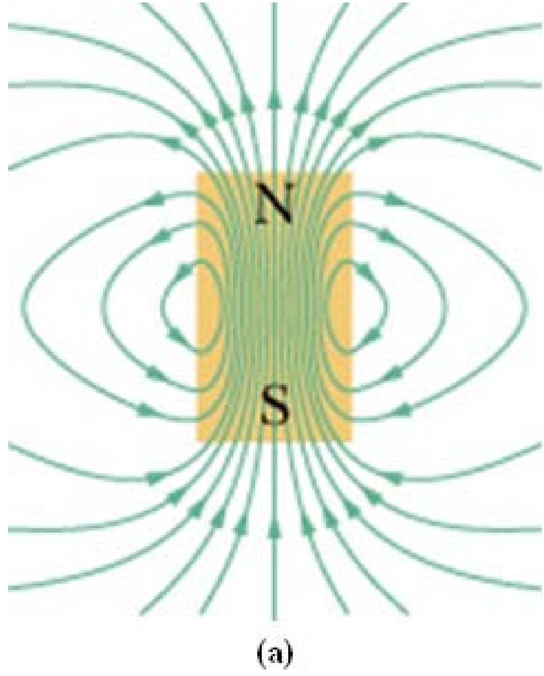
1. Herhangi bir P noktasında, manyetik alan vektörü $\vec{B}$ manyetik alan çizgisine teğettir.



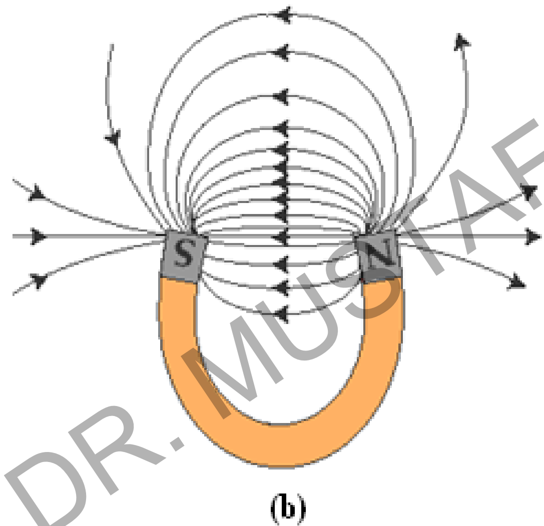

2. Manyetik alan şiddeti, manyetik alan çizgilerinin yoğunluğu ile orantılıdır.



# Kalıcı Bir Mıknatısın Manyetik Alan Çizgileri :



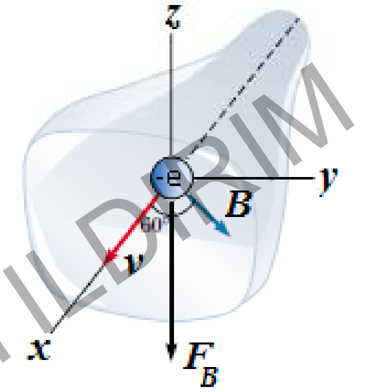
(a)



(b)

Şekil-a' da, kalıcı bir mıknatısın manyetik alan çizgileri gösterilmiştir. Bunlar, bir kısmı mıknatısın içinden geçen **kapalı** halkalar şeklindedir. Pozitif yükte başlayıp negatif yükte sonlanan elektrik alan çizgileri gibi, başlangıç ve bitiş noktaları yoktur. Kapalı halka şeklindeki manyetik alan çizgileri, mıknatısın bir ucundan girer diğer ucundan çıkarlar. Alan çizgilerinin çıkış yaptıkları uç mıknatısın ***kuzey kutbu***, giriş yaptıkları uç ise ***güney kutbu*** olarak bilinir. Bu kutupları bağımsız olacak şekilde mıknatıstan ayıramayız. İkisi birlikte bir "**magnetic dipole**" oluştururlar. Şekil-b' de, at nalı şeklinde bükülmüş bir çubuk mıknatısın manyetik alan çizgileri verilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı gibi, kutuplar arasında ve kutupların birbirine yakın olduğu yerlerde manyetik alan çok şiddetlidir.

**Örnek :** Şekilde görüldüğü gibi, bir televizyon tüpü içerisindeki elektronlar $+x$-ekseni yönünde $8\times10^{6}$ m/s' lik bir hızla ekrana dik doğrultuda gelmektedir. Tüpü çevreleyen kangalların oluşturduğu manyetik alan $xy$-düzleminde, $x$-ekseni ile $60^{o}$' lik açı yapmakta ve büyüklüğü de 25 mT' dır. Elektronlara etkiyen manyetik kuvvetin büyüklüğünü ve elektronun ivmesini hesaplayınız.




$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} \rightarrow \left|\vec{F}_B\right| = evB\sin\theta = \left(1.6\times10^{-19}\right)*\left(8\times10^{6}\right)*\left(25\times10^{-3}\right)\sin 60$$

$$\left|\vec{F}_B\right| = 2.77\times10^{-14}\ \text{N (sağ-el kuralına göre, } -z \text{ yönünde)}$$

$$F = ma \rightarrow a = \frac{\left|\vec{F}_B\right|}{m_e} = \frac{2.77\times10^{-14}}{9.11\times10^{-31}} = 3.04\times10^{16}\ \text{m/s}^2$$

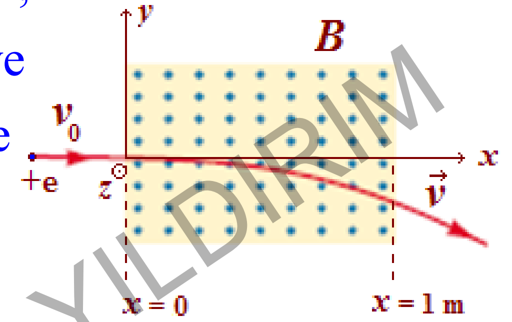
**Örnek :** Bir proton, $+y$-ekseni yönündeki 0.3 T' lık bir manyetik alan içinde, alan ile $37^{o}$' lik açı yapacak şekilde $3\times10^{6}$ m/s hızla hareket etmektedir. Protona etkiyen manyetik kuvvetin büyüklüğünü ve protonun ivmesini hesaplayınız.

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} \rightarrow \left|\vec{F}_B\right| = evB\sin\theta = \left(1.6\times10^{-19}\right)*\left(3\times10^{6}\right)*\left(0.3\right)\sin 37$$

$$\left|\vec{F}_B\right| = 8.7\times10^{-14}\ \text{N}$$

$$F = ma \rightarrow a = \frac{\left|\vec{F}_B\right|}{m_p} = \frac{8.7\times10^{-14}}{1.67\times10^{-27}} = 5.21\times10^{13}\ \text{m/s}^2$$

**Örnek :** Kinetik enerjisi 5 MeV olan ve $+x$-ekseni yönünde giden protonlar, şekildeki gibi, $x=0$ ile $x=1$ m aralığında etkin, büyüklüğü $B=0.05$ T olan ve sayfa düzleminden dışarı doğru yönelmiş düzgün bir manyetik alan bölgesine giriyor. Protonlar manyetik alan bölgesini hangi hızla terkederler. ($1\text{ eV}=1.6\times10^{-19}$ J).




$$\frac{1}{2}m_p v_0^2=\left(5\times10^6\right)*\left(1.6\times10^{-19}\right)\rightarrow v_0=\sqrt{\frac{16\times10^{-13}}{1.67\times10^{-27}}}=3.1\times10^7\text{ m/s}$$

$$\vec{F}_B=q\vec{v}_0\times B\rightarrow m_p a_y=ev_0 B\sin 90$$

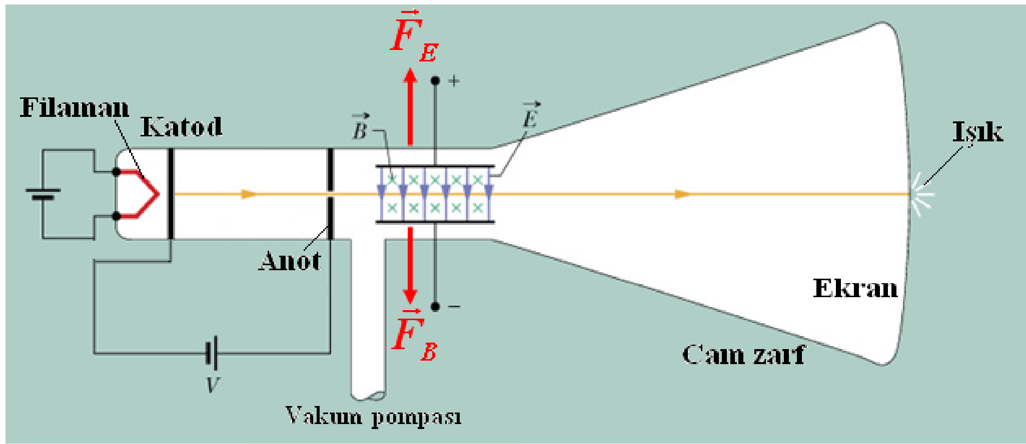
Proton çok hızlı olduğu için merkezcil kuvvetin yatay yöndeki bileşeninin etkisi ihmal edilebilir.

$$a_y=\frac{\left(1.6\times10^{-19}\right)*\left(3.1\times10^7\right)0.05}{1.67\times10^{-27}}=1.5\times10^{14}\text{ m/s}^2\ \text{(sağ-el kuralına göre, } -y \text{ yönünde)}$$

$$a_x=0\rightarrow\begin{cases} v_x=v_{0x}+a_x t\rightarrow v_x=v_0=3.1\times10^7\text{ m/s}\\ \Delta x=v_{0x}t\rightarrow t=\dfrac{1}{3.1\times10^7}=3.22\times10^{-8}\text{ s}\end{cases}$$

$$v_y=v_{0y}-a_y t\rightarrow v_y=-a_y t=-\left(1.5\times10^{14}\right)*\left(3.22\times10^{-8}\right)=-4.83\times10^6\text{ m/s}$$

$$\vec{v}=\left[3.1\hat{\imath}-0.483\hat{\jmath}\right]\times10^7\text{ m/s}\qquad\text{ve}\qquad\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-0.483}{3.1}\right)=-8.86^{\circ}$$




**Elektronun Keşfi :** Yandaki şekilde bir katod ışınları tüpü görülmektedir. Filamanın ısıttığı katod' tan elektron yayınlanır. Anot ile katod arasına uygulanan $V$ potansiyel farkı altında hızlanırlar ve odaklanırlar.

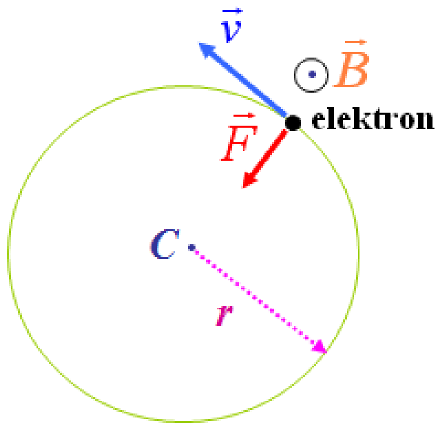
Anotta açılmış küçük bir delikten ince bir elektron demeti oluşturarak dışarı çıkar ve floresan ekrana çarparak bir ışık noktası oluştururlar. 1897 yılında J.J. Thomson benzer bir katod ışını tüpü kullanarak, ışık noktasını neyin oluşturduğunu anlamak için araştırmalar yaptı. Şekilde görüldüğü gibi, anot' un sağ tarafındaki bölgeye birbirine dik, sabit elektrik alan ve manyetik alan uyguladı. Demet üzerindeki net kuvveti sıfır yapacak manyetik alan ve elektrik alan şiddetlerini ayarlayarak demetin sapmasını engelledi. Buradan,

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

$$\vec{F}_E = \vec{F}_B \rightarrow eE = evB \rightarrow v = \frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \rightarrow \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2}$$

sonucuna ulaştı ve böylece elektronu keşfetmiş oldu.

## Düzgün Manyetik Alan İçinde Yüklü Parçacığın Hareketi (Dairesel hareket = cyclotron hareketi):




Kütlesi $m$ olan bir $q$ nokta yükü, $v$ hızıyla düzgün manyetik alan içine dik olacak şekilde girerse, düzgün dairesel hareket yapar. Manyetik alana dik olarak giren bir elektronun yaptığı dairesel hareket yanda verilmiştir. Böyle bir hareketi sağlayan merkezcil kuvvet $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ ile verilen manyetik kuvvettir.

Böyle bir hareketin yarıçapı, periyodu ve frekansı:

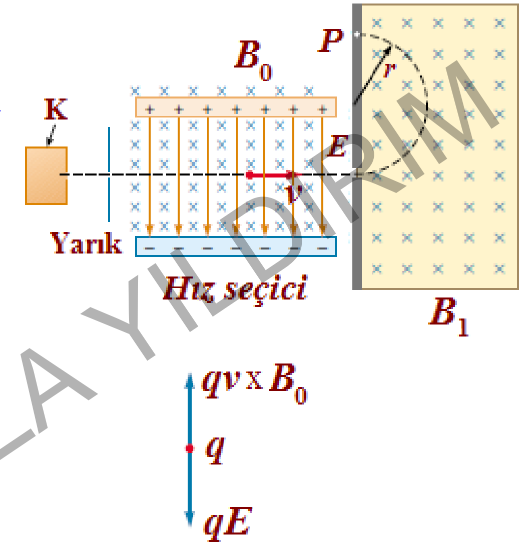
$$F_B = |q|vB = ma = m\frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi mv}{|q|Bv} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{|q|B} \rightarrow f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{|q|B}{2\pi m} \rightarrow \omega = 2\pi f \rightarrow \omega = \frac{|q|B}{m}$$

**Not 1 :** Hareketin periyodu $v$ hızına bağlı değildir. Aynı yüke ve kütleye sahip tüm parçacıklar, farklı hızlara sahip olsalarda, tam bir turu aynı sürede yaparlar.

**Not 2 :** Hızlı parçacıklar büyük yarıçapta çemberler üzerinde dolanırken, yavaş parçacıklar daha küçük yarıçapta çemberler üzerinde dolanırlar.

**Örnek :** Yanda, iyonları kütle-yük oranlarına göre ayırd etmeye yarayan "**Kütle spektrometresi**" nin şematik gösterimi verilmiştir. Kaynaktan çıkan iyonlar dar bir yarıktan geçirilerek, birbirine dik elektrik ($\vec{E}$) ve manyetik ($\vec{B}_0$) alan olan bir bölgeden geçirilir ve düzgün başka bir manyetik alan ($\vec{B}_1$) bölgesine dik olarak girerler. İyonlar bu bölgede $r$ yarıçaplı yarım bir çember çizerek fotografik bir yüzeye çarparlar. İyonların kütle-yük oranını ifade eden bağıntıyı türetiniz.



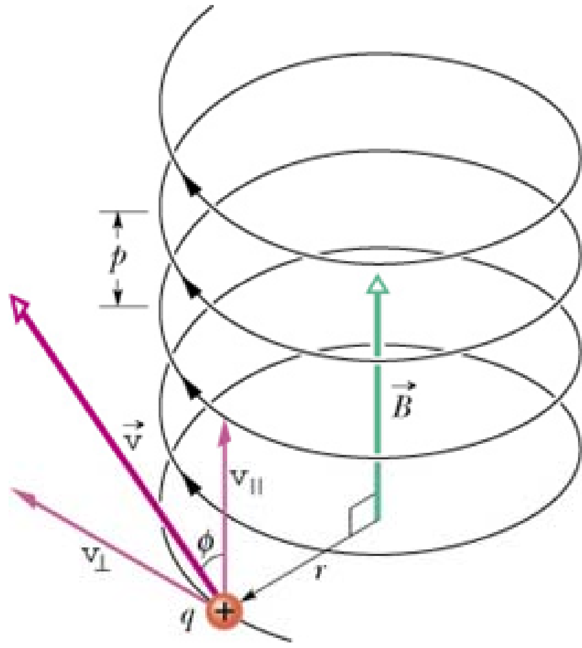

$$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}_0 = 0 \rightarrow qE = qvB_0 \rightarrow v = \frac{E}{B_0}$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow qvB_1 = m\frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{qB_1}$$

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_1}{v} = \frac{rB_0B_1}{E}$$

Bu ifade kullanılarak, iyonların kütle-yük oranı deneysel olarak belirlenir.

## Spiral (sarmal) Yörünge :




Düzgün manyetik alanına, $\vec{v}$ hızı ile $\vec{B}$ manyetik alanı arasında $\phi$ açısı olacak şekilde giren yüklü bir parçacık olsun. Parçacığın $\vec{v}$ hızını, manyetik alana dik ve paralel olan bileşenlere ayıralım. Bu bileşenler yanda gösterilmiştir: $v_{\parallel} = v\cos\phi$ ve $v_{\perp} = v\sin\phi$. Parçacık bağımsız iki hareket yapar.

Bunlardan birisi, manyetik alana dik olan düzlemde yarıçapı ve periyodu,

$$r = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad ; \quad T = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

olan dairesel hareketidir.

Diğeri ise, manyetik alan yönünde $v_{\parallel}$ sabit hızıyla yapılan ötelenme hareketidir.

Bu iki hareketin birleşimi spiral şeklindedir ve spiralin sarmal adımı ($p$):

$$p = Tv_{\parallel} = \frac{2\pi mv\cos\phi}{|q|B}$$

**Örnek :** Bir proton, büyüklüğü 0.35 T olan düzgün bir manyetik alan içerisinde, yarıçapı 14 cm olan çembersel bir yörünge üzerinde düzgün dairesel hareket yapmaktadır. Protonun yörüngedeki çizgisel hızını bulunuz. Aynı manyetik alan içerisinde bir elektron, aynı çizgisel hızla düzgün dairesel hareket yapsaydı, yörüngesinin yarıçapı ne olurdu?

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times B \rightarrow evB = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \frac{erB}{m} = \frac{\left(1.6\times10^{-19}\right)*\left(14\times10^{-2}\right)*0.35}{1.67\times10^{-27}} = 4.7\times10^{6}\ \text{m/s}$$

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{\left(9.11\times10^{-31}\right)*\left(4.7\times10^{6}\right)}{\left(1.6\times10^{-19}\right)*0.35} = 76.4\times10^{-6} = 76.4\ \mu\text{m}$$

**Örnek :** 350 V' luk bir potansiyel fark altında durgun halden hızlandırılan elektronlar, düzgün bir manyetik alan içerisine dik olarak giriyor ve yarıçapı 7.5 cm olan çembersel bir yörünge üzerinde hareket ediyor. Manyetik alanın büyüklüğünü, elektronların açısal hızını ve periyodunu bulunuz.

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = 350*\left(1.6\times10^{-19}\right) \rightarrow v = \sqrt{\frac{700*\left(1.6\times10^{-19}\right)}{9.11\times10^{-31}}} = 11.1\times10^{6}\ \text{m/s}$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v}_0 \times B \rightarrow evB = m_e\frac{v^2}{r} \rightarrow B = \frac{m_e v}{er} = \frac{\left(9.11\times10^{-31}\right)*\left(11.1\times10^{6}\right)}{\left(1.6\times10^{-19}\right)*\left(7.5\times10^{-2}\right)} = 8.43\times10^{-4}\ \text{T}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{11.1\times10^{6}}{7.5\times10^{-2}} = 1.48\times10^{8}\ \text{rad/s} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{1.48\times10^{8}} = 4.25\times10^{-8}\ \text{s} = 42.5\ \text{ns}$$

**Örnek :** Yükü $q = 3.2\times10^{-19}$ C olan bir parçacık, düzgün bir elektrik ve manyetik alan olan bölgeye $v = \left(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}\right)$ m/s hızla giriyor. $\vec{E} = \left(4\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}\right)$ V/m ve $\vec{B} = \left(2\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}\right)$ T olduğuna göre, parçacığa etkiyen net kuvveti bulunuz. Bu kuvvet x-ekseni ile ne kadarlık bir açı yapar?

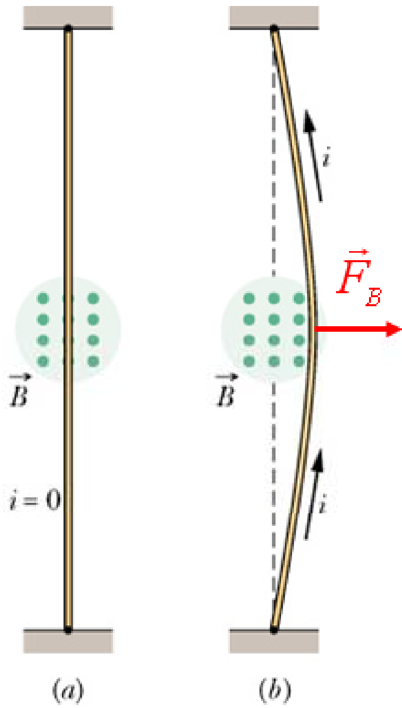
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

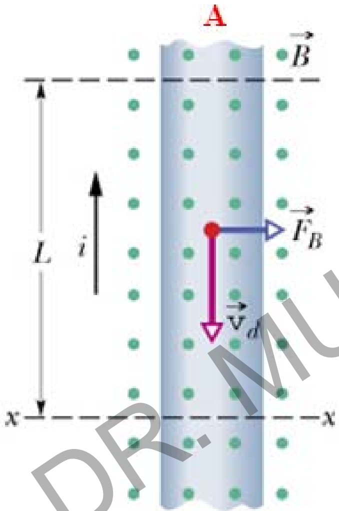
$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (3+4)\hat{i} - (2+2)\hat{j} + (8-6)\hat{k} = 7\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{F} = \left(3.2\times10^{-19}\right) * \left[\left(4\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}\right) + \left(7\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}\right)\right] = \left(3.2\times10^{-19}\right) * \left[11\hat{i}-5\hat{j}\right] \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{11}\right) = -24.4^{o}$$

# Akım Taşıyan Tele Etkiyen Manyetik Kuvvet :



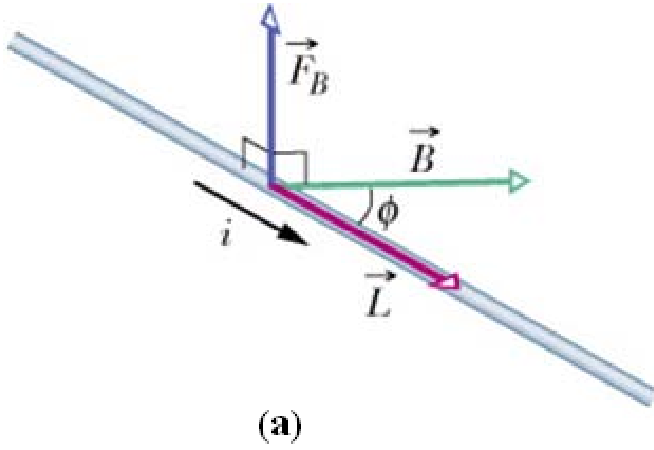




Şekilde, kesit alanı $A$ olan ve $i$ akımı taşıyan uzun bir tel verilmiştir. Telin $L$ uzunluğundaki bir kısmı, sayfa düzleminden dışarı doğru yönelmiş düzgün bir manyetik alan içinde olsun. $\vec{B}$ manyetik alanı tarafından tele dik doğrultuda bir $\vec{F}_B$ kuvveti uygulanır. Bu kuvvet, telin $L$ uzunluğunda bulunan tüm elektronlara etkiyen manyetik kuvvetlerin vektörel toplamına eşittir. Telin $L$ uzunluğunda bulunan toplam yük $Q$ olmak üzere,

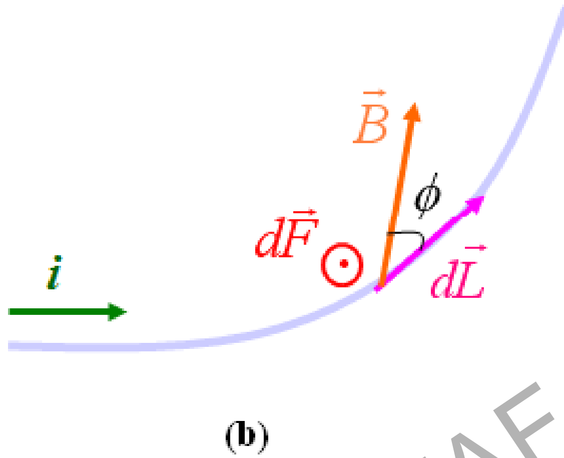
$$Q = it = i\frac{L}{v_d} \rightarrow Qv_d = iL$$

$$F_B = \sum_i q_i v_d B \sin 90^\circ = \left(\sum_i q_i\right) v_d B = Qv_d B$$

$$F_B = iLB$$




Telin akım yönünün, $\vec{B}$ manyetik alanı ile herhangi bir $\phi$ açısı yaptığı genel durumda (Şekil-a) manyetik kuvvet vektörel formda, $\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$ şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{L}$ vektörü, büyüklüğü telin $L$ uzunluğuna eşit, akımla aynı yönde bir vektördür.

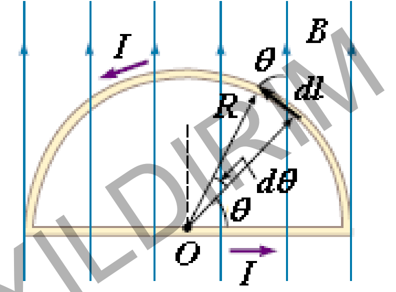



Manyetik alanın düzgün olmadığı ve akım taşıyan telin doğrusal olmadığı durumlarda (Şekil-b) akım taşıyan tel, doğrusal kabul edilebilecek sonsuz küçük $dL$ uzunluğundaki elemanlara bölünür. Her bir $dL$ elemanına etkiyen manyetik kuvvet $d\vec{F}_B = id\vec{L} \times \vec{B}$ olduğundan, net kuvvet:

$$\vec{F}_B = i\int d\vec{L} \times \vec{B}$$

şeklinde yazılır.

**Örnek :** İletken bir tel bükülerek $R$ yarıçaplı kapalı bir yarım çember haline getirilmiştir. Sayfa düzleminde bulunan ve yukarı yönde olan düzgün bir $\vec{B}$ manyetik alanı içine konan iletken halka, şekildeki gibi, saat ibrelerinin tersi yönünde $I$ akımı taşıdığına göre, halkaya etki eden net kuvveti bulunuz.




$\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_2$, sırasıyla, halkanın düz kısmına ve çembersel kısmına etkiyen kuvvetlerdir.

$$\vec{F}_1 = \int I d\vec{l} \times \vec{B} \rightarrow F_1 = \int_0^{2R} IdlB \sin 90 = IB\int_0^{2R} dl = 2IRB$$ (sayfa düzleminden dışarı doğru)

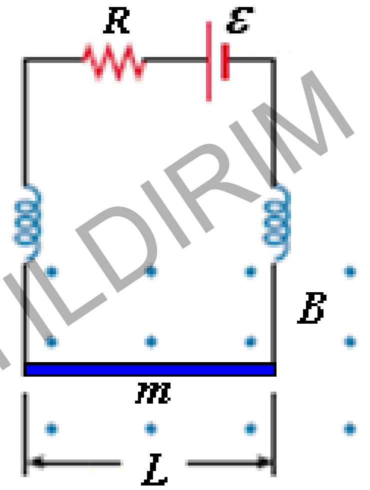
$$\vec{F}_2 = \int I d\vec{l} \times \vec{B} \rightarrow F_2 = \int IdlB \sin\theta = IB\int_0^{\pi} \sin\theta (Rd\theta)$$

$$F_2 = -IBR\left[\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2IRB$$ (sayfa düzleminden içeri doğru)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F = \left(2IRB - 2IRB\right) = 0$$

**Örnek :** Yandaki devrenin tabanındaki iletken telin uzunluğu $L=5$ cm ve kütlesi $m=10$ g' dır. Devredeki direnç $R=12\ \Omega$ ve bataryanın emk' sı $\mathcal{E}=24$ V' tur. Manyetik alan yokken yaylardaki uzama miktarı 0.5 cm iken, sayfa düzleminden dışarı doğru düzgün bir $B$ manyetik alan uygulandığında 0.8 cm oluyor. Uygulanan manyetik alanın şiddeti nedir?




Yay sabiti $k$ ve manyetik alan yokken uzama miktarı $y_0$ olsun.

Devreden geçen akım: $I=\dfrac{\mathcal{E}}{R}=\dfrac{24}{12}=2\ \text{A}$ (saat ibrelerinin tersi yönünde)

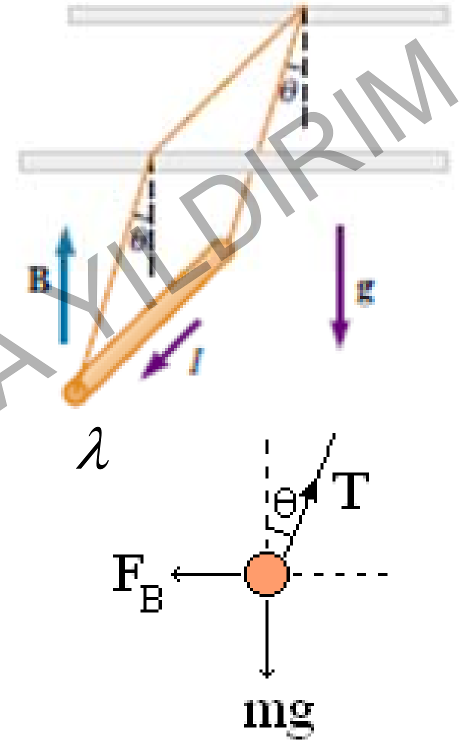
Manyetik alan yokken: $2ky_0=mg$ (Eş-1)

Manyetik alan varken: $2ky_1=mg+ILB$ (Eş-2)

Eş-2 ve Eş-1' i taraf tarafa oranlarsak,

$$\frac{y_1}{y_0}=\frac{mg+ILB}{mg}\rightarrow B=\left(\frac{y_1}{y_0}-1\right)\frac{mg}{IL}=\left(\frac{0.8}{0.5}-1\right)*\frac{\left(10\times10^{-3}\right)10}{2*(5\times10^{-2})}=0.6\ \text{T}$$

**Örnek :** Birim uzunluğunun kütlesi $\lambda$ olan ve $I$ akımı taşıyan iletken bir çubuk iki ucundan ağırlıksız iplerle asılmıştır. Çubuğun bulunduğu bölgede yukarı yönde düzgün $B$ manyetik alanı uygulandığında, çubuğu taşıyan ipler düşeyle $\theta$ açısı yapacak şekilde çubuk dengede kalıyor. Manyetik alanın şiddetini bulunuz.



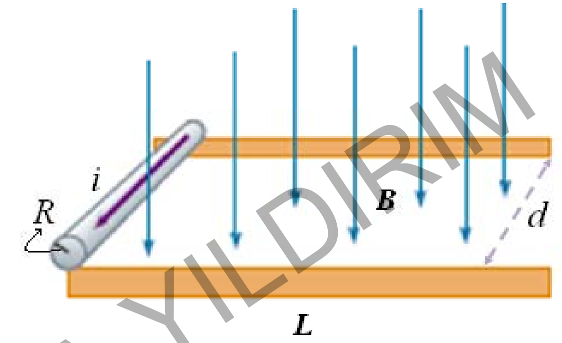

Çubuğun boyu $L$ olsun.

$$T\sin\theta = F_B = ILB \qquad \text{(Eş-1)}$$
$$T\cos\theta = mg = \lambda Lg \qquad \text{(Eş-2)}$$

Eş-2 ve Eş-1' i taraf tarafa oranlarsak,

$$\tan\theta = \frac{ILB}{\lambda Lg} \rightarrow B = \frac{\lambda g}{I}\tan\theta$$

**Örnek :** Kütlesi $m$ ve yarıçapı $R$ olan iletken bir çubuk, şekildeki gibi, aradalarında $d$ mesafesi olan $L$ uzunluğundaki iki paralel iletken ray üzerinde durmaktadır. İletkenden $i$ akımı geçtiğinde ve rayların oluşturduğu düzleme dik ve yukarı yönde düzgün bir $\vec{B}$ manyetik alanı uygulandığında, iletken durgun halden sağa doğru kaymadan yuvarlanmaktadır. İletken yayları hangi hızla terkeder?




$$\vec{F}_B = \int i d\vec{L} \times \vec{B} \rightarrow F = iBd$$ (sağ-el kuralına göre sağa doğru)

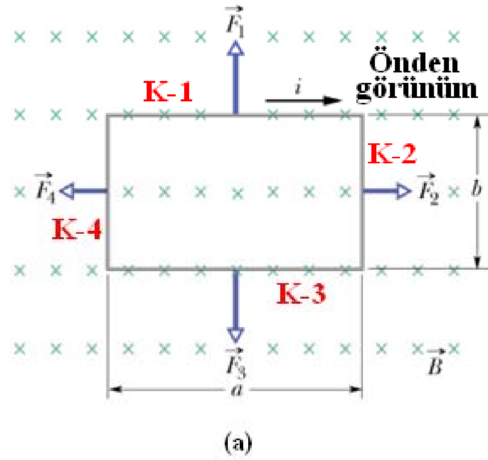
$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Burada $I$, silindirin eksenine göre eylemsizlik momentidir ($I = \frac{1}{2}mR^2$).

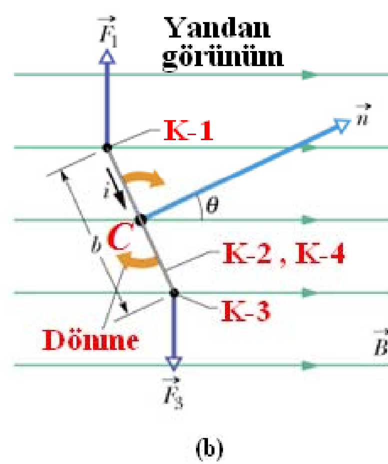
$$W = F * L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4FL}{3m}} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{iBdL}{m}}$$

# Akım Halkasına Etki Eden Manyetik Tork :



(a)



(b)

Şekil-a' da $a$ ve $b$ kenar uzunluklarına sahip, $i$ akımı taşıyan dikdörgen şeklinde bir akım halkası verilmiştir. Akım halkası, yüzey normali $\hat{n}$, $\vec{B}$ manyetik alanı ile $\theta$ açısı yapacak şekilde manyetik alanı içine konuyor. 1 ve 3 nolu kenarlara etkiyen manyetik kuvvetler ile 2 ve 4 nolu kenarlara etkiyen manyetik kuvvetler kendi içlerinde eşit büyüklükte ve ters yöndedirler:

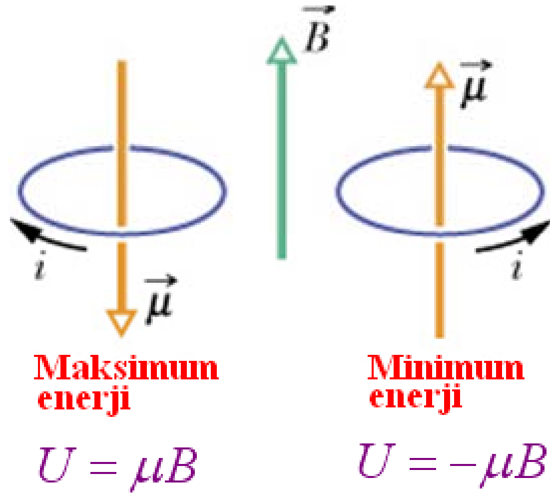
$$F_1 = F_3 = iaB\sin 90° = iaB$$

$$F_2 = F_4 = ibB\sin(90-\theta) = ibB\cos\theta$$

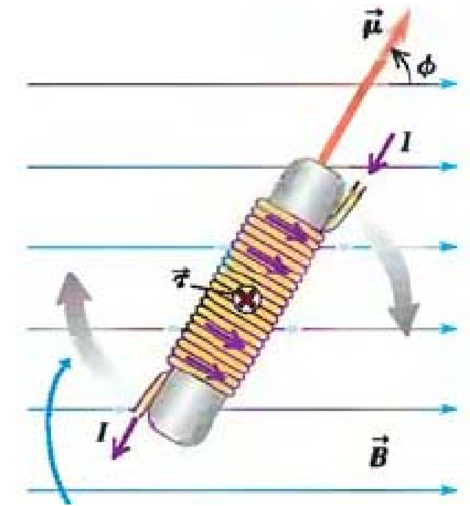
Bu kuvvet çiftlerinin vektörel toplamı sıfırdır ($F_{net} = 0$). Ancak, $F_1$ ve $F_3$ kuvvetleri, halkanın merkezi C noktasına göre sayfadan içeri doğru bir tork oluşturur (halkayı saat yönünde döndürür) ve büyüklüğü de:

$$\tau = \tau_1 + \tau_3 = (\frac{iabB}{2})\sin\theta + (\frac{iabB}{2})\sin\theta = iabB\sin\theta = iAB\sin\theta$$

# Manyetik Dipol Moment :




Sarım sayısı $N$ olan ve $i$ akımı taşıyan bir akım halkası $\vec{B}$ manyetik alanı içine konulduğunda üzerine etkiyen tork $\tau = NiAB$ ile verilir. Akım taşıyan halkayla ilgili olarak, "manyetik dipol moment ($\vec{\mu}$)" olarak bilinen yeni bir vektör tanımlayabiliriz. Bu vektörün büyüklüğü $NiA$ ile verilir ve halka düzlemine dik doğrultudadır. Yönü sağ el kuralına göre belirlenir. Sağ elimizin parmak uçları akım yönünü gösterecek şekilde halkayı kavrarsak, baş parmağımızın yönü manyetik dipol momentinin yönü olur.




$\vec{\mu}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açı $\theta$ olmak üzere tork, $\tau = \mu B \sin\theta$ veya vektörel formda $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ ile verilir.

Halkanın potansiyel enerjisi ise, $U = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ eşitliği ile verilir.

$\theta = 0 \rightarrow U = -\mu B$, potansiyel enerji mnimumdur (**kararlı** denge konumu).

$\theta = 180° \rightarrow U = +\mu B$, potansiyel enerji maksimumdur (**kararsız** denge konumu).

**Not :** Her iki konumda da halkaya etkiyen net tork sıfırdır ($\tau = 0$).

**Örnek :** Kenar uzunlukları 5.4 cm ve 8.5 cm olan 25 sarımlı dikdörgen şeklindeki bir halka 15 mA akım taşımaktadır. Büyüklüğü 0.35 T olan düzgün bir manyetik alan, halkanın yüzeyine paralel olacak şekilde uygulanıyor. Halkanın dipol momentini, halkaya etkiyen torku ve halkanın potansiyel enerjisini bulunuz.

$\vec{B}$ yüzeye paralel, $\vec{\mu}$ yüzeye dik olduğuna göre, $\vec{B}$ ile $\vec{\mu}$ arasındaki açı $90^{\circ}$ dir.

$$\mu = N(iA) = 25*\left(15\times10^{-3}\right)*\left(5.4*8.5\times10^{-4}\right) = 1.72\times10^{-3}\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} \rightarrow \tau = \mu B\sin\theta \rightarrow \tau = \left(1.72\times10^{-3}\right)*\left(0.35\right)\sin 90 = 6.02\times10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \rightarrow U = -\mu B\cos\theta = 0$$

Uygulanan manyetik alanın, halka yüzeyi ile $60^{\circ}$ ve $90^{\circ}$ yapması durumunda, halkaya etkiyen tork ve halkanın potansiyel enerjisi ne olur?

$\vec{B}$ yüzey ile $60^{\circ}$ ve $90^{\circ}$ 'lik açı yapıyorsa, sırasıyla, $\vec{\mu}$ ile $30^{\circ}$ ve $0^{\circ}$ 'lik açı yapar:

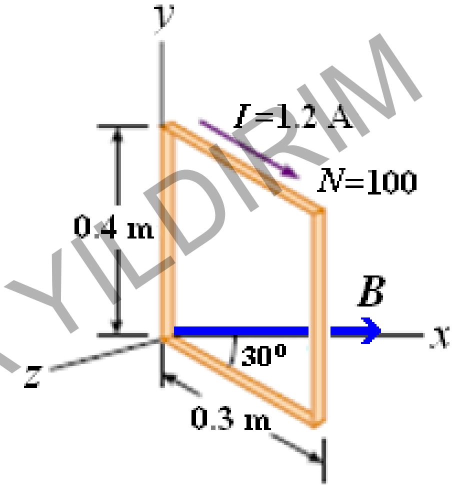
$$\tau_{30^{\circ}} = \mu B\sin\theta = \left(1.72\times10^{-3}\right)*\left(0.35\right)\sin 30 = 3.01\times10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$U_{30^{\circ}} = -\mu B\cos\theta = -\left(1.72\times10^{-3}\right)*\left(0.35\right)\cos 30 = -5.21\times10^{-4}\ \text{J}$$

$$\tau_{0^{\circ}} = \mu B\sin\theta = \left(1.72\times10^{-3}\right)*\left(0.35\right)\sin 0 = 0$$

$$U_{0^{\circ}} = -\mu B\cos\theta = -\left(1.72\times10^{-3}\right)*\left(0.35\right)\cos 0 = -6.02\times10^{-4}\ \text{J}$$

**Örnek :** Kenar uzunlukları 0.4 m ve 0.3 m olan 100 sarımlı dikdörgen şeklindeki bir halka, şekildeki gibi, uzun kenarı $y$-ekseni üzerinde, kısa kenarıda $x$-ekseni ile $30^{o}$ açı yapacak şekilde durmaktadır. Halka, $y$-ekseni ile çakışık olan kenarı etrafında rahatça dönebilmektedir. Halkanın 1.2 A akım taşıması ve $+x$ yönünde büyüklüğü 0.8 T olan düzgün bir manyetik alan uygulanması durumunda halkaya etkiyen torku bulunuz.




Sağ-el kuralına göre, halkanın dipol momenti $-z$ doğrultusu ile $30^{o}$ ' lik açı ve $+x$ doğrultusu ile $60^{o}$ ' lik açı yapar.

$$\mu = N(iA) = 100 * (1.2) * (0.4 \times 0.3) = 14.4 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \rightarrow \tau = \mu B \sin\theta$$ (Sağ-el kuralına göre, $-y$ yönünde)

Halka, $y$ ekseni etrafında saat ibreleri yönünde döner.

$$\tau = (14.4) * (0.8) \sin 60 \cong 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \rightarrow U = -\mu B \cos\theta$$

$$U = -(14.4) * (0.8) \cos 60 = -5.76 \text{ J}$$

**Örnek :** Uzunluğu 60 cm olan ve 20 A akım taşıyan iletken bir tel, kapalı halka haline getirilerek, normali 0.5 T büyüklüğündeki manyetik alana dik olacak şekilde manyetik alan içine konuyor. Halka, *a*–) eş-kenar bir üçgen, *b*–) kare ve *c*–) çember ise, üzerine etkiyen torku bulunuz. Hangi durumda halkaya etkiyen tork maksimumdur.

*a*–) Eş-kenar üçgen: $3d = 60 \rightarrow d = 20$ cm

$$A = \frac{1}{2}dh = \frac{1}{2}d\sqrt{d^2 - (d/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = 0.0173 \text{ m}^2$$

$$\mu = iA = 20*(0.0173) = 0.346 \text{ A}\cdot\text{m}^2 \rightarrow \tau = \mu B = 0.346*(0.5) = 0.173 \text{ N}\cdot\text{m}$$

*b*–) Kare: $4d = 60 \rightarrow d = 15$ cm

$$A = d^2 = (0.15)^2 = 0.0225 \text{ m}^2$$

$$\mu = iA = 20*(0.0225) = 0.45 \text{ A}\cdot\text{m}^2 \rightarrow \tau = \mu B = 0.45*(0.5) = 0.225 \text{ N}\cdot\text{m}$$

*c*–) Çember: $2\pi d = 60 \rightarrow d = 9.55$ cm

$$A = \pi d^2 = \pi(0.0955)^2 = 0.0287 \text{ m}^2$$

$$\mu = iA = 20*(0.0287) = 0.574 \text{ A}\cdot\text{m}^2 \rightarrow \tau = \mu B = 0.574*(0.5) = 0.287 \text{ N}\cdot\text{m}$$

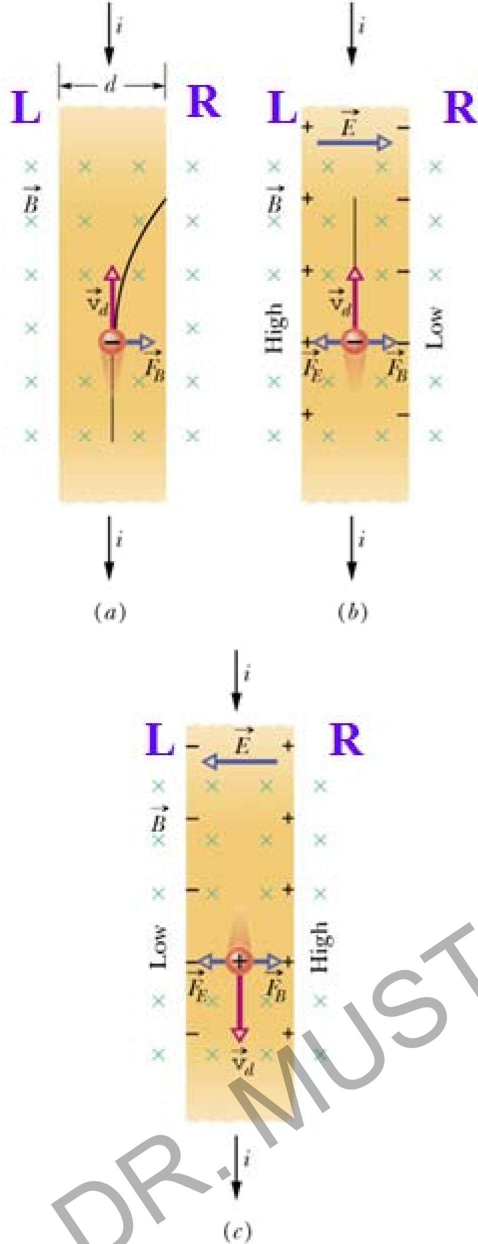
**Çembere etkiyen tork maksimum olur.**

**ÖDEV :** Kütlesi 0.1 kg ve toplam uzunluğu 4 m olan bir tel, kenar uzunluğu 0.1 m olan kare şeklindeki halka etrafına sarılarak bir kangal elde ediliyor. Halka, bir kenarı yatay eksen üzerinde olacak şekilde asılmıştır ve bu eksen etrafında rahatça dönebilmektedir. Halka, düşey doğrultuda büyüklüğü 10 mT olan bir manyetik alan içinde iken, üzerinden 3.4 A' lik akım geçirilmektedir.

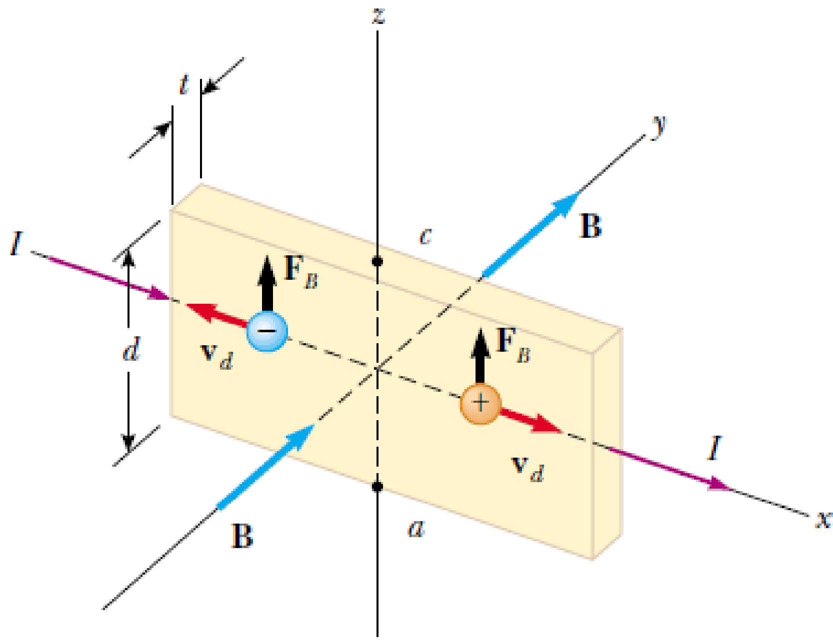
*a*–) Halka dengede iken, yüzeyi ile manyetik alan arasındaki açı nedir?

*b*–) Halka dengede iken, manyetik alan tarafından etkiyen tork ne olur?

# Hall Etkisi :




Edvin Hall, 1879 yılında metallerde iletimin negatif yüklü elektronlarla gerçekleştiğini gösteren bir deney yapmıştır. Bu deney sayesinde, metaldeki elektron yoğunluğunu ($n$) da belirleyebilmiştir. Deneyde, kesitinin genişliği $d$ ve kalınlığı $t$ olan bakır bir dilim kullanmıştır. Bu dilim, şekildeki gibi yüzeyine dik yönde düzgün bir manyetik alan içinde iken $i$ akımı taşımaktadır. Elektronlar, $\vec{B}$ manyetik alanı nedeniyle $\vec{F}_B$ manyetik kuvvetinin etkisiyle dilimin sağ tarafına doğru (R) itilirler ve böylelikle, dilimin sağ tarafı sol tarafına (L) göre daha negatif olur. İki kenar arasında oluşan yük farkı nedeniyle bir $\vec{E}$ elektrik alanı oluşur ve elektronlara kuvvet uygulamaya başlar. Bir süre sonra, elektronlar üzerine etkiyen net kuvvet sıfır olur.



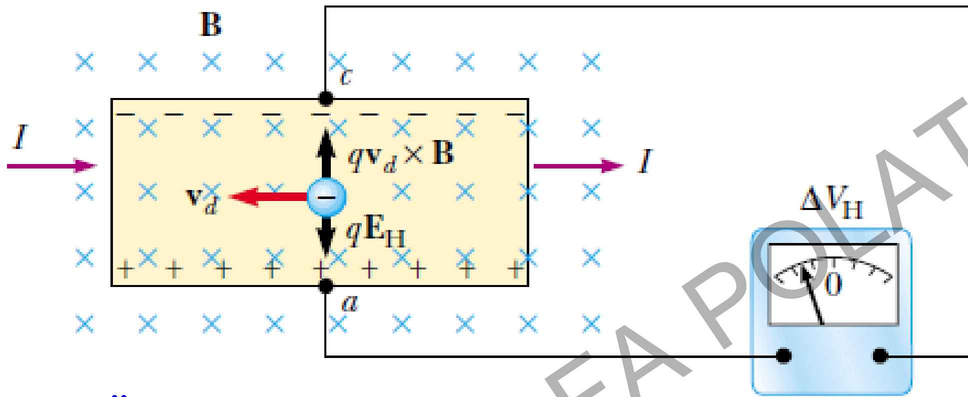

$$F_E = F_B \rightarrow eE_H = ev_d B \rightarrow E_H = v_d B \qquad \text{(Eş-1)}$$

$$J = nev_d \rightarrow v_d = \frac{J}{ne} = \frac{i}{neA} = \frac{i}{netd} \qquad \text{(Eş-2)}$$

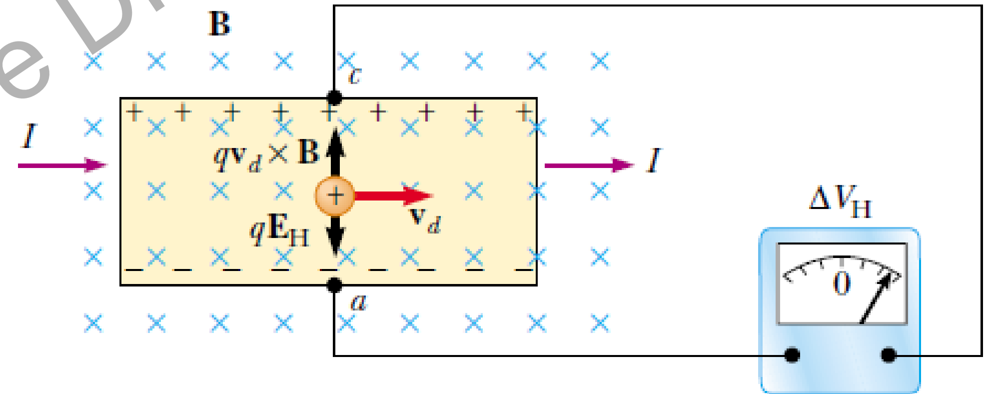
Yandaki bakır dilimin *a* noktası ile *c* noktası arasındaki Hall potansiyeli $V_H = E_H d$ ile verilir. Bu durumda,

$$E_H = v_d B \rightarrow \frac{V_H}{d} = B\frac{i}{netd} \rightarrow \quad n = \frac{Bi}{etV_H} \qquad \text{(Eş-3)}$$

sonucu elde edilir.




Üstteki şekilde olduğu gibi, yük taşıyıcıları elektronlar olduğu durumda $V_H = V_c - V_a$ **negatiftir.**




Üstteki şekilde olduğu gibi, yük taşıyıcıları protonlar olduğu durumda $V_H = V_c - V_a$ **pozitiftir.**

Dilimin kenarlarından hangisinin pozitif hangisinin negatif olduğundan yola çıkılarak, yük taşıyıcılarının cinsi belirlenebilir. Deneysel olarak ölçülen $V_H$ Hall potansiyeli Eş-3' te kullanılarak, yüktaşıyıcılarının yoğunluğu bulunur.

**Örnek :** Genişliği 1.5 cm ve kalınlığı 0.1 cm olan dikdörgen şeklindeki bakır bir dilim 5 A akım taşımaktadır. İletken dilim, yüzeyine dik yönde, büyüklüğü 1.2 T olan bir manyetik alan içinde ise, Hall voltajını hesaplayınız. (Bakırın elektron yoğunluğu: $n = 8.49\times10^{28}$ elektron/m$^3$).

$$n = \frac{Bi}{V_h te} \rightarrow V_h = \frac{Bi}{nte} = \frac{1.2*(5)}{\left(8.49\times10^{28}\right)*\left(0.1\times10^{-2}\right)*\left(1.6\times10^{-19}\right)}$$

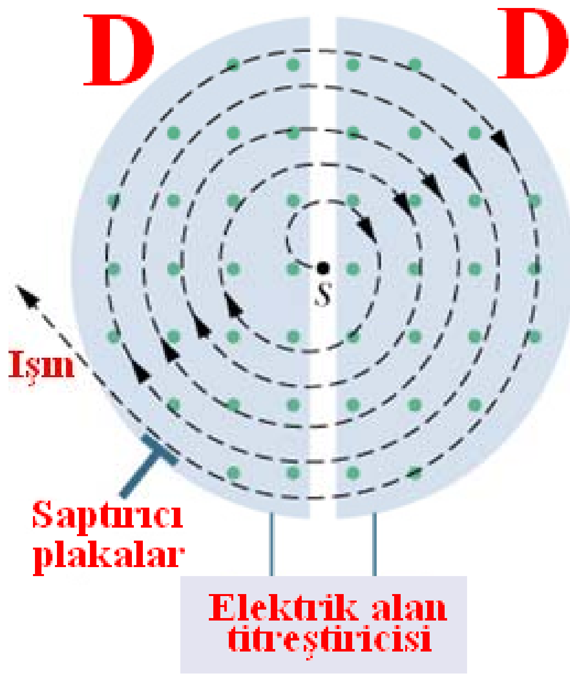
$$V_h = 4.42\times10^{-7} \cong 0.44\ \mu\text{V}$$

**Örnek :** Kalınlığı 0.33 mm olan bir şerit, yüzeyine dik yönde, büyüklüğü 1.3 T olan düzgün bir manyetik alan içinde 50 A akım taşımaktadır. Şeritin uzun kenarları arasında ölçülen Hall voltajı 9.6 $\mu$V ise, şeritteki elektron yoğunluğunu bulunuz.

$$n = \frac{Bi}{V_h le} = \frac{1.3*(50)}{\left(9.6\times10^{-6}\right)*\left(0.33\times10^{-3}\right)*\left(1.6\times10^{-19}\right)}$$

$$n = 12.82\times10^{28}\ \text{elektron/m}^3$$

# Cyclotron Parçacık Hızlandırıcı :




Cyclotron hızlandırıcısı, şekildeki gibi birbirine ters bakan "D" şeklinde, içi boş iki adet iletkenden oluşur. D' ler arasındaki boşlukta, $f_E$ frekansıyla titreşen bir $E$ elektrik alanı, D' lerin bulunduğu düzleme dik yönde de düzgün bir $B$ manyetik alanı oluşturulur. Şekilde bir proton hızlandırıcısı gösterilmiştir. Protonlar, $r = \dfrac{mv}{eB}$ yarıçaplı çembersel bir yörüngede $f = \dfrac{eB}{2\pi m}$ frekansı ile dönerler. Bu frekans (cyclotron frekansı) ile elektrik alanın değişim frekansı ($f_E$) eşit olduğunda, protonlar D' ler arasındaki boşlukta elektrik alan tarafından hızlandırılır. Protonlar hızlandıkça yörünge yarıçaplarını artırırlar. Elektrik alan protonların hızını artırırken, manyetik alan onları çembersel yörüngede dönmeye zorlayacak şekilde hızlarının yönünü değiştirir.

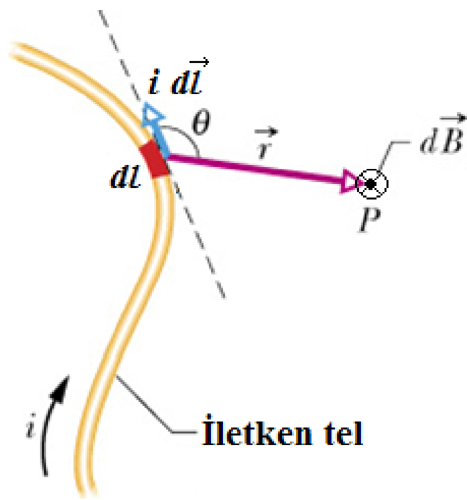
# BÖLÜM-29
# Elektrik Akımlarının Oluşturduğu Manyetik Alanlar

Bu bölümde, elektrik akımı ile oluşturduğu manyetik alan arasındaki ilişkiyi anlamaya çalışacağız. Bunun için, problemin simetrisine bağlı olarak iki farklı yol izleyeceğiz.

Simetrinin düşük olduğu durumlarda **Biot-Savart yasasını**, yüksek olduğu durumlarda ise **Amper yasasını** kullanacağız.

Çok değişik geometrilere sahip iletkenlerin oluşturdukları manyetik alanlar her iki yaklaşımla da bulunabilir. Ayrıca, birbirine paralel iki iletken arasındaki manyetik kuvveti de hesaplayacağız.

**Biot - Savart Yasası :** Bu yasa, $i$ akımı taşıyan $dl$ uzunluğundaki bir iletkenin, kendisinden $r$ kadar uzaktaki bir noktada oluşturduğu $d\vec{B}$ manyetik alanını verir. Solda $i$ akımı taşıyan bir tel verilmiştir. Tel üzerinde akımla aynı yönde, sonsuz küçük uzunlukta bir $d\vec{l}$ vektörü seçilir. $i$ akımı taşıyan bu parçanın, kendisinden $r$ kadar uzaktaki $P$ noktasında oluşturduğu manyetik alan:

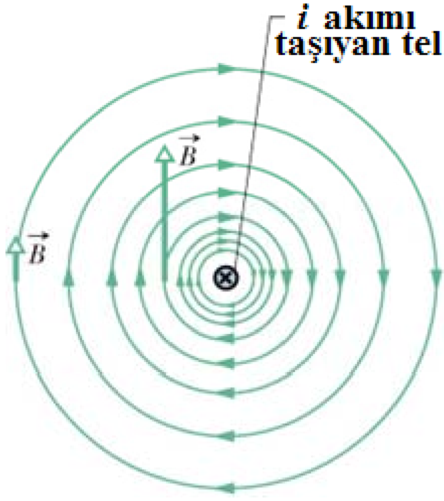



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

ifadesi ile verilir. Burada $\vec{r}$ vektörü, iletken üzerinde seçilen $d\vec{l}$ vektör elemanından P noktasına çizilen vektördür. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A ile verilen bir sabittir ve hava ya da boşluğun manyetik geçirgenliğidir. $\theta$, $d\vec{l}$ ile $\vec{r}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere, $d\vec{B}$ manyetik alanının büyüklüğü de:

$$dB = \frac{\mu_0 i \, dl \sin\theta}{4\pi \quad r^2}$$

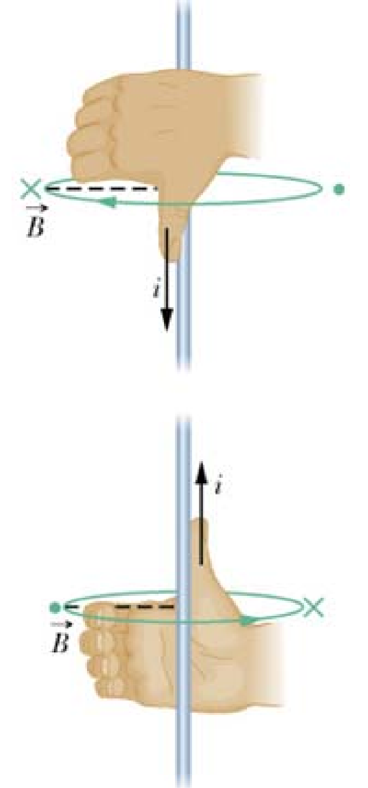
ile verilir.

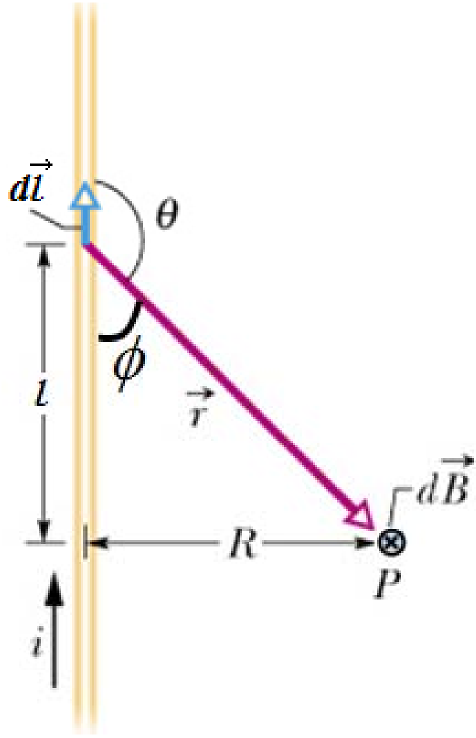



# Sonsuz Uzun Telin Manyetik Alanı :

Biot-Savart yasasına göre, sonsuz uzun düz bir telden eşit uzaklıktaki noktalarda manyetik alan şiddeti aynı, yönü ise sağ-el kuralına göre çevreseldir. Yani, teli merkez alan çemberlere her noktada teğettir.

Sağ-el parmak uçları akım yönünü gösterecek şekilde $d\vec{l}$ vektörünü avuç içerisine yatırıp, en küçük açı yönünde $\vec{r}$ vektörü üzerine süpürürsek, başparmağımız manyetik alan yönünü gösterir. Bir diğer gösterim şekli de, sağ-el başparmağı akım yönünü gösterecek şekilde iletken tel avuç içerisine alınırak kavranırsa, kalan parmakların uçlarının gösterdiği yön manyetik alan yönüdür.






Şekildeki tel üzerinde akımla aynı yönde bir $d\vec{l}$ elemanı seçelim. Bu elemanın $P$ noktasında oluşturduğu manyetik alan $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 i}{4\pi}\dfrac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ sayfadan içeri doğrudur ve büyüklüğü,

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

ile verilir. Akım taşıyan tel sonsuz uzunlukta ise, $P$ noktasında oluşturduğu toplam manyetik alan:

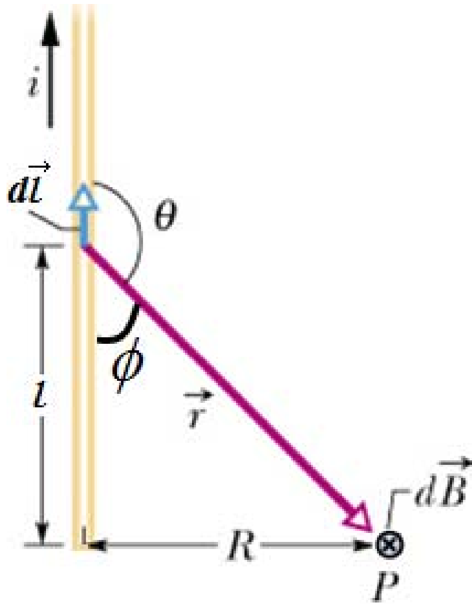
$$B = \int_{-\infty}^{\infty} dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

$$r = \sqrt{l^2 + R^2} \qquad \sin\theta = \sin\phi = R/r = R/\sqrt{l^2 + R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R\,dl}{\left(l^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{R\,dl}{\left(l^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\left[\frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}\right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}}$$

# Yarı Sonsuz Telin Manyetik Alanı :




Sonsuz uzun tel için yapılan işlemlerin aynısı burada da tekrarlanacaktır. Telin başlangıcını orijin olarak kabul edersek, tele dik yönde orijinden $R$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasındaki manyetik alan:

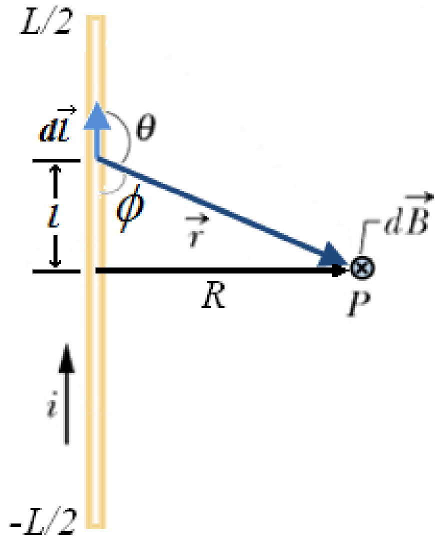
$$B = \int_0^{\infty} dB == \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

$$r = \sqrt{l^2 + R^2} \qquad \sin\theta = \sin\phi = R/r = R/\sqrt{l^2 + R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{R\,dl}{\left(l^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left[ \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

# Sonlu Telin Manyetik Alanı :




Şekildeki tel üzerinde akımla aynı yönde bir $d\vec{l}$ elemanı seçelim. Bu elemanın $P$ noktasında oluşturduğu manyetik alan sayfadan içeri doğrudur ve büyüklüğü,

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl\sin\theta}{r^2}$$

ile verilir. Akım taşıyan telin uzunluğu $L$ ise, telin ortasından $R$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasında oluşan manyetik alan:

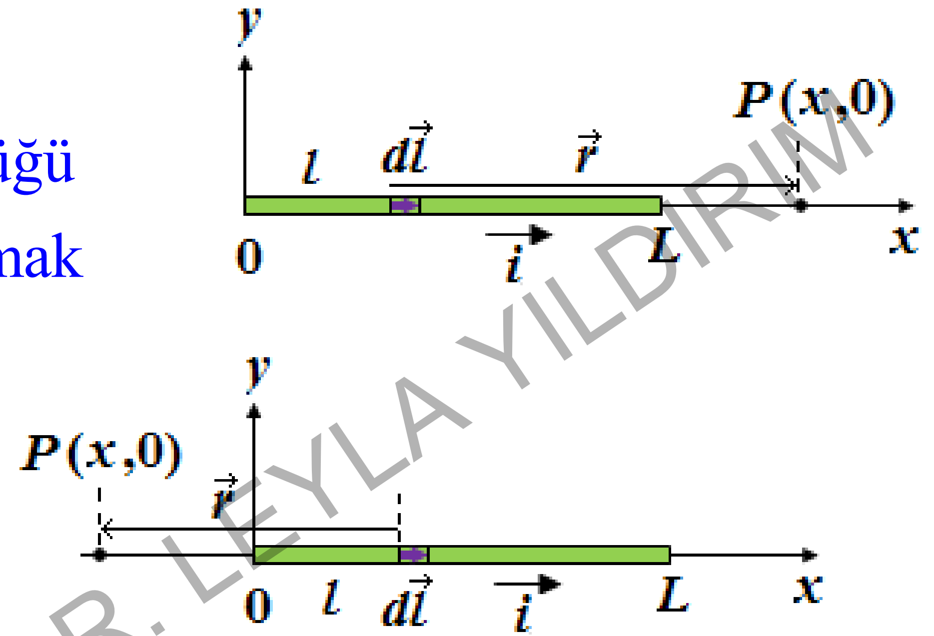
$$B = \int_{-L/2}^{L/2} dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dl\sin\theta}{r^2}$$

$$r = \sqrt{l^2 + R^2} \qquad \sin\theta = \sin\phi = R/r = R/\sqrt{l^2 + R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{R\,dl}{\left(l^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_{0}^{L/2}\frac{R\,dl}{\left(l^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\left[\frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}\right]_0^{L/2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}}$$

**Örnek :** Üzerinden kararlı $i$ akımı geçen, uzunluğu $L$ olan ince bir tel, şekilde görüldüğü gibi $x$-ekseni üzerindedir. $x > L$ ve $x < L$ olmak üzere, $x$-ekseni üzerinde herhangi bir $P(x,0)$ noktasındaki manyetik alanı bulunuz.

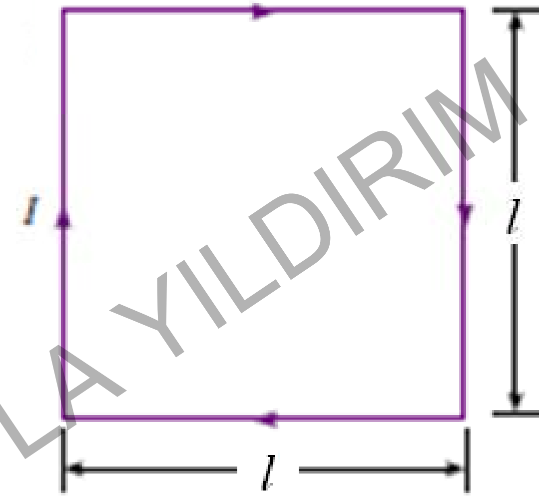



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$L$ uzunluğundaki tel üzerinde seçilen sonsuz küçük $d\vec{l}$ elemanı ile, buradan manyetik alanı bulmak istediğimiz $P$ noktasına çizilen $\vec{r}$ vektörü arasındaki açı $0^\circ$ olduğundan, $d\vec{l} \times \vec{r} = 0$ olur ve $x$-ekseni üzerinde, $x > L$ şartını sağlayan tüm noktalarda manyetik alan sıfırdır.

Benzer bir durum $x < 0$ için de geçerlidir. $d\vec{l}$ vektörü ile $\vec{r}$ vektörleri arasındaki açı $180^\circ$ olduğundan, $d\vec{l} \times \vec{r} = 0$ olur ve $x$-ekseni üzerinde, $x < 0$ şartını sağlayan tüm noktalarda manyetik alan sıfırdır.

**Örnek :** Kenar uzunluğu $l = 0.4$ m olan kare bir halka, şekildeki gibi, saat ibreleri yönünde 10 A şiddetinde bir akım taşımaktadır. Karenin merkezindeki manyetik alanın büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.



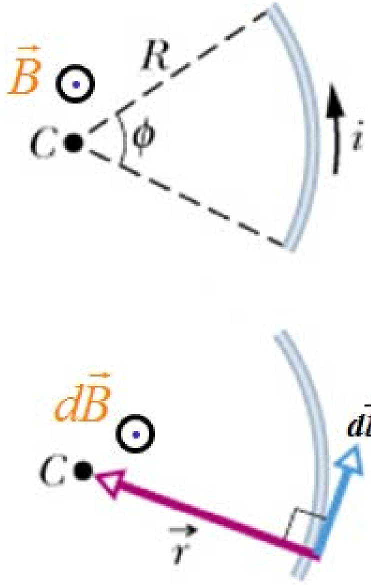

$L$ uzunluğunda, $i$ akımı taşıyan bir telden $r$ kadar uzaktaki manyetik alan:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + r^2}}$$

$$r = \frac{l}{2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi (l/2)} \frac{l}{\sqrt{(l/2)^2 + (l/2)^2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{l}{2}\right)\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 i}{\pi l \sqrt{2}}$$

$$B_T = 4 * B = 4 * \frac{4\pi \times 10^{-7} (10)}{\pi l \sqrt{2}} = 28.28 \times 10^{-6} \text{ T}$$

# Çembersel Yay Parçasının Manyetik Alanı :




Şekildeki gibi, $i$ akımı taşıyan $R$ yarıçaplı çembersel bir yay parçası olsun. Yayı gören açı radyan cinsinden $\phi$' dir. İletken üzerinde akımla aynı yönde seçilen bir $d\vec{l}$ elemanının çemberin merkezi C noktasında oluşturduğu manyetik alan, Biot-Savart yasasından,

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin 90°}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{R^2}$$

$$dl = R d\phi \rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} d\phi$$

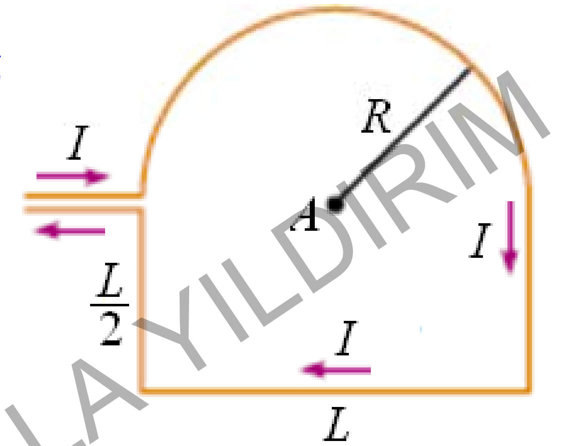
ile verilir ve sayfa düzleminden dışarı doğrudur. Net manyetik alan:

$$B = \int dB = \int_0^{\phi} \frac{\mu_0 i}{4\pi R} d\phi \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \phi$$

$\phi = \pi / 2$ (çeyrek çember) $\quad$ $\phi = \pi$ (yarım çember) $\quad$ $\phi = 2\pi$ (çember)

$$B = \frac{\mu_0 i}{8R} \qquad B = \frac{\mu_0 i}{4R} \qquad B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

**Örnek :** Kapalı bir halka gibi değerlendirebileceğimiz yandaki kangal $I$ akımı taşımaktadır. $A$ noktasındaki manyetik alan ifadesini bulunuz.




$$\vec{B} = \vec{B}_ç + 2\vec{B}_{L/2} + \vec{B}_L$$

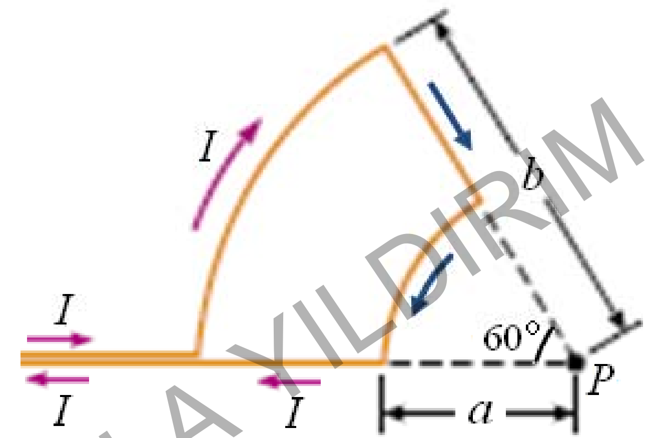
$$B_ç = \frac{\mu_0 i}{4R} = \frac{\mu_0 i}{2L} \quad , \quad \otimes$$

$$B_{L/2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left[\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}\right]_0^{L/2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi(L/2)}\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2+(L/2)^2}} = \frac{\mu_0 i}{2\sqrt{2}\pi L} \quad , \quad \otimes$$

$$B_L = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left[\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi(L/2)}\frac{L}{\sqrt{(L/2)^2+(L/2)^2}} = \frac{\mu_0 i}{\sqrt{2}\pi L} \quad , \quad \otimes$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2L} + 2\frac{\mu_0 i}{2\sqrt{2}\pi L} + \frac{\mu_0 i}{\sqrt{2}\pi L} = \frac{\mu_0 i}{L}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}\pi}\right) \quad , \quad \otimes$$

**Örnek :** Yanda verilen kapalı halka $I$ akımı taşımaktadır. $P$ noktasındaki manyetik alan ifadesini bulunuz.




Telin düz kısımlarının oluşturduğu manyetik alan $= 0$

$a$ ve $b$ yarıçaplı yaylar P noktasında manyetik alan oluşturur.

$$\vec{B} = \vec{B}_b + \vec{B}_a$$

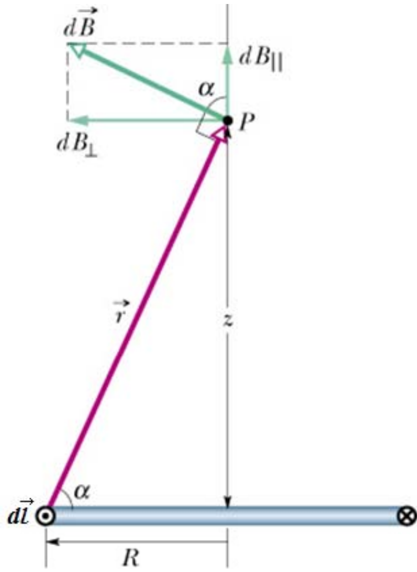
$$B_{yay} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\phi \quad \rightarrow$$

$$B_b = \frac{\mu_0 i}{4\pi b}\frac{\pi}{3} = \frac{\mu_0 i}{12b}, \quad \otimes$$

$$B_a = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\frac{\pi}{3} = \frac{\mu_0 i}{12a}, \quad \odot$$

$$B_a > B_b \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i}{12}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] = \frac{\mu_0 i\left(b-a\right)}{12ab}, \quad \odot$$

# Çembersel Akım Halkasının Manyetik Alanı :




İletken üzerinde seçilen sonsuz küçük bir $dl$ elemanının, çemberin merkezinden dik geçen $z$-ekseni üzerindeki $P$ noktada oluşturduğu manyetik alan,

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl \sin 90°}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}$$

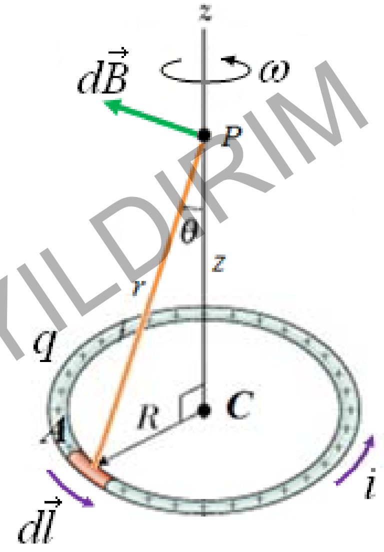
ile verilir. Doğrultusu ise $z$-ekseniyle $\alpha$ açısı yapacak yöndedir. Manyetik alanın $z$-eksenine dik bileşenlerinin ($dB_{\perp}$) toplamı sıfır, paralel bileşenlerinin ($dB_{\|}$) toplamı ise sıfırdan farklıdır.

$$dB_{\|} = dB\cos\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl\cos\alpha}{r^2}; \quad r = \sqrt{R^2+z^2} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{R}{r}$$

$$dB_{\|} = \frac{\mu_0 iR}{4\pi}\frac{dl}{r^3} = \frac{\mu_0 iR}{4\pi}\frac{dl}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \quad \rightarrow \quad B = \int dB_{\|} \quad , (R \text{ ve } z \text{ sabit})$$

$$B = \frac{\mu_0 iR}{4\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int dl = \frac{\mu_0 iR}{4\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}(2\pi R) \rightarrow B = \frac{\mu_0 iR^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

**Örnek :** Yarıçapı $R$ olan çembersel bir halka üzerinde düzgün dağılmış toplam $q$ yükü taşımaktadır. Halka, merkezinden geçen ve yüzeyine dik eksen etrafında $\omega$ sabit açısal hızı ile dönmektedir. Çember ekseni üzerinde ve çemberden $z = R/2$ kadar uzaktaki bir noktada oluşan manyetik alan nedir?



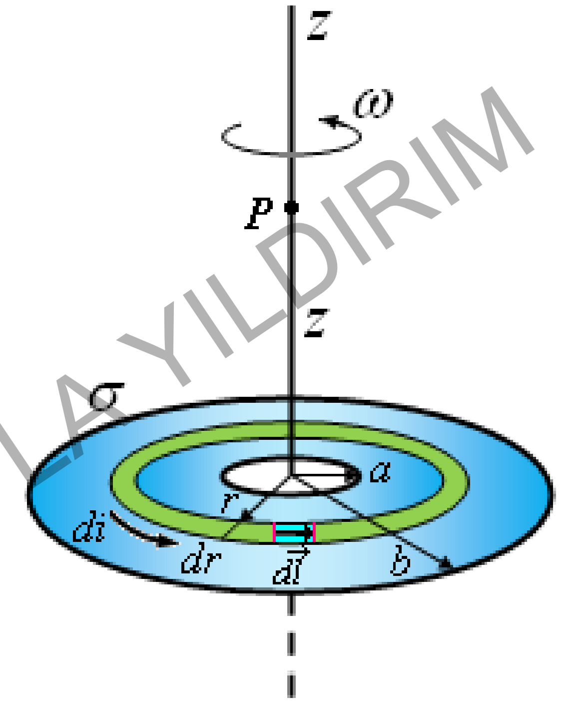

Çemberin z-ekseni etrafında dönmesi ile oluşan akım:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \rightarrow i = \frac{q}{T} = \frac{q}{(2\pi/\omega)} = \frac{q\omega}{2\pi}$$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i R^2}{2\left[R^2 + (R/2)^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2R^3\left[1 + 1/4\right]^{3/2}}$$

$$B = \frac{4\mu_0 i}{R\sqrt[3]{5}} = \frac{4\mu_0}{R\sqrt[3]{5}}\frac{q\omega}{2\pi} = \frac{2\mu_0 q\omega}{\pi R\sqrt[3]{5}}$$

**Örnek :** İç yarıçapı $a$ ve dış yarıçapı $b$ olan bir disk düzgün $\sigma$ yüzey yük yoğunluğuna sahiptir. Disk, merkezinden geçen ve yüzeyine dik olan $z$-ekseni etrafında $\omega$ sabit açısal hızı ile dönmektedir. Diskin ekseni üzerinde ve disk merkezinden $z$ kadar uzaktaki $P$ noktasında oluşan manyetik alanını ve diskin manyetik dipol momentini bulunuz.




$a < r < b$ olacak şekilde, disk üzerinden $dr$ kalınlığında bir halka seçelim. Bu halkadan geçen $di$ akımı:

$$di = \frac{\Delta q}{\Delta t} \rightarrow di = \frac{\sigma 2\pi r dr}{T} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{(2\pi / \omega)} = \sigma\omega r dr$$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \rightarrow dB = \frac{\mu_0 r^2 di}{2\left[r^2 + z^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 r^2 (\sigma\omega r dr)}{2\left[r^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

$$B=\int dB=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_a^b\frac{r^3dr}{\left[r^2+z^2\right]^{3/2}}$$

$$\int\frac{x^3dx}{\left[x^2+a^2\right]^{3/2}}=\frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

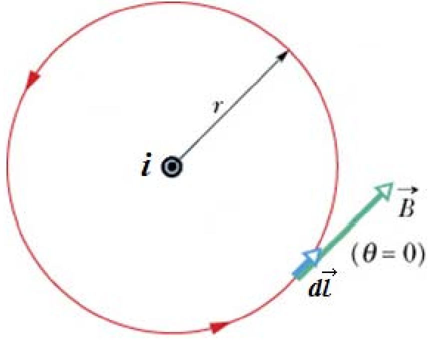
$$B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{r^2+2z^2}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_a^b=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{b^2+2z^2}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{a^2+2z^2}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]$$

$di$ akımı taşıyan $r$ yarıçaplı halkanın manyetik dipol momenti,

$$d\mu=di\left(\pi r^2\right)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan, net manyetik dipol moment:

$$\mu=\int d\mu=\int_a^b\sigma\omega r dr\left(\pi r^2\right)=\sigma\omega\pi\int_a^b r^3dr=\frac{\sigma\omega\pi}{4}\left(b^4-a^4\right)$$




**Amper Yasası :** Akım dağılımının bilindiği durumda, manyetik alanı bulmak için Biot-Savart yasası ile birlikte üstüste binme ilkesini kullandık. Akım dağılımındaki simetri yüksek ise, Biot-Savart yasasının yerine işlemlerin kolaylığı nedeniyle Amper yasasını kullanacağız.

Amper yasasını, Biot-Savart yasasından türetebiliriz. Şekilde $i$ akımı taşıyan sonsuz uzun bir tel verilmiştir. Teli merkez kabul eden $r$ yarıçaplı çembersel bir halka üzerinden $\vec{B}$' nin çizgi integrali:

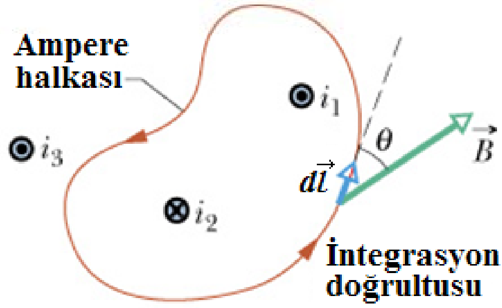
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dl \cos 0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i \rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{iç}$$

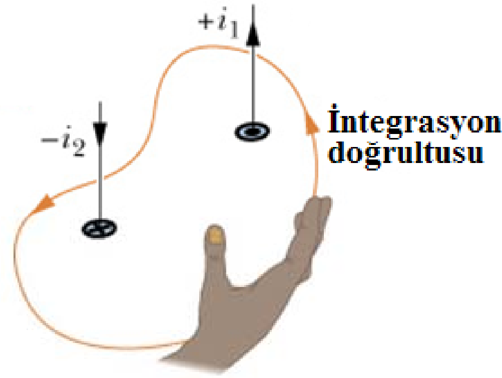
bulunur. İntegral sonucunun, seçilen halkanın geometrisinden bağımsız olduğuna dikkat ediniz. Bu son bağıntı Amper yasası olarak bilinir ve şöyle tanımlanır:

"Herhangi bir kapalı eğri boyunca $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ integrali, $\mu_0$ ile kapalı halka içindeki net akımın çarpımına eşittir".

Kapalı eğri "**Amper halkası**" olarak isimlendirilir.

# Amper Yasasının Uygulanması :




$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{iç}$$

**1.** $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ integralinin belirlenmesi. Kapalı halka $\Delta\vec{l}_1, \Delta\vec{l}_2, ..., \Delta\vec{l}_n$ gibi $n$ tane elemana bölünür ve $\sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta\vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} B_i \Delta l_i \cos\theta_i$ toplamı hesaplanır. Burada $\vec{B}_i$, $i$. elemanın bulunduğu yerdeki manyetik alandır. $n \to \infty$ durumunda bu toplam:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta\vec{l}_i \text{ olur.}$$

**2.** $i_{iç}$' in hesaplanması. Sağ-el parmak uçları kapalı halka üzerindeki hareket yönünü gösterecek şekilde halka kavranır.

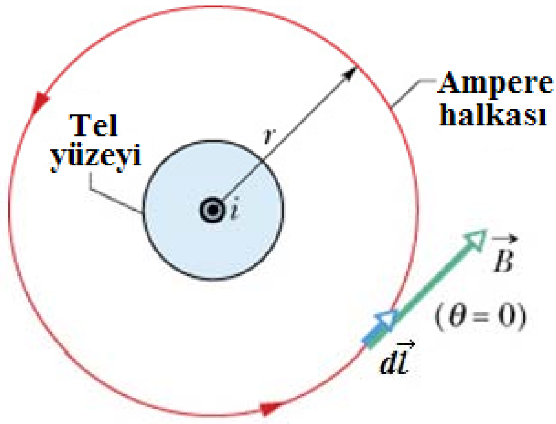
Halka içinde başparmağımızla aynı yönde olan akımlar **pozitif** alınır.

Halka içinde başparmağımızla ters yönde olan akımlar **negatif** alınır.

Halka dışındaki akımların **hiçbir katkısı yoktur**.

Şekildeki örnekte: $i_{iç} = i_1 - i_2$

# Uzun Bir Telin Dışındaki Manyetik Alan :




*i* akımı taşıyan sonsuz uzun bir telin oluşturduğu manyetik alan çizgilerinin, teli merkez kabul eden çemberler şeklinde olduğunu biliyoruz. Problem silindirik simetriye sahiptir ve teli merkez alan *r* yarıçaplı bir çember Amper halkası olarak seçilebilir. Manyetik alanın büyüklüğü çemberin üzerindeki her noktada aynıdır ve yönü çembere teğettir. Bu durumda manyetik alan,

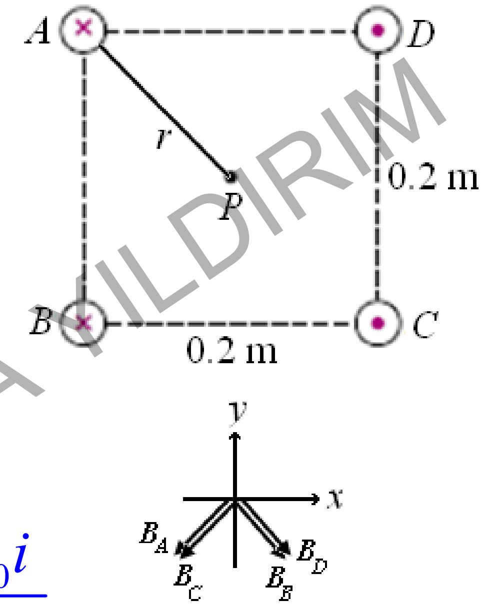
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl \cos 0 = B \oint dl = 2\pi r B$$

$$\mu_0 i_{\text{iç}} = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

olarak bulunur.

**Not :** Amper yasası herhangi bir kapalı halka için geçerlidir. Hesaplamalarda kolaylık sağlaması açısından en basit halkayı seçmek daha uygundur.

**Örnek :** Sonsuz uzunlukta dört tel, yandaki gibi, kenar uzunluğu 0.2 m olan bir karenin köşelerine yerleştirilmiş, sayfa düzleminden içeri ve dışarı doğru 5 A şiddetinde akım taşımaktadırlar. Karenin merkezindeki net manyetik alanı hesaplayınız.



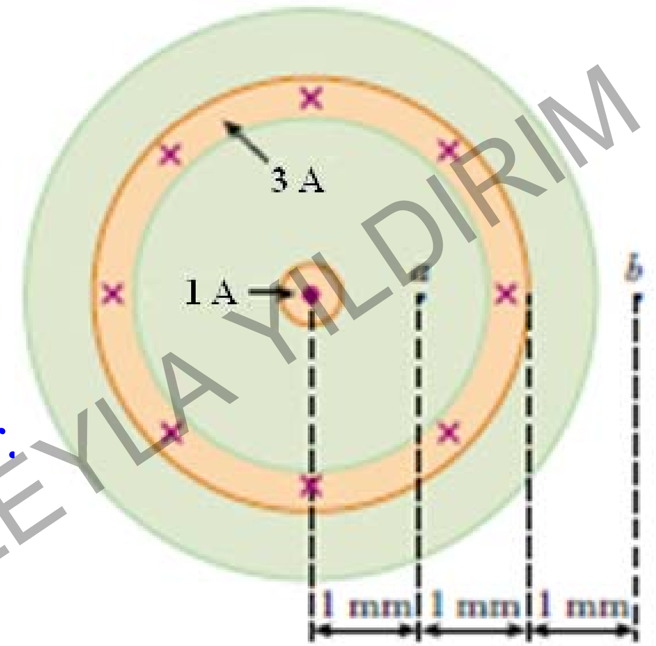

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(0.2)^2 + (0.2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{10} \text{ m} \quad ; \quad B_A = B_B = B_C = B_D = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\sum B_x = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left[-\sin 45 - \sin 45 + \sin 45 + \sin 45\right] = 0$$

$$\sum B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left[-4 * \cos 45\right] = -\frac{\mu_0 i}{2\pi r} 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi r}$$

$$\vec{B} = -\left(\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi r}\right)\hat{j} = -\left(\frac{\sqrt{2} * 4\pi * 10^{-7} \times 5}{\pi \frac{\sqrt{2}}{10}}\right)\hat{j} = -\left(2 \times 10^{-5}\right)\hat{j}$$

**Örnek :** Yanda, bir koaksiyel kablonun kesiti verilmiştir. Merkezdeki iletkenin taşıdığı akım sayfa düzleminden dışarı doğru 1 A, dıştakinin taşıdığı akım ise sayfa düzleminden içeri doğru 3 A' dir. İç ve dış iletkenler plastikle kaplanmışlardır. Şekilde gösterilen *a* ve *b* noktalarındaki manyetik alanları bulunuz.

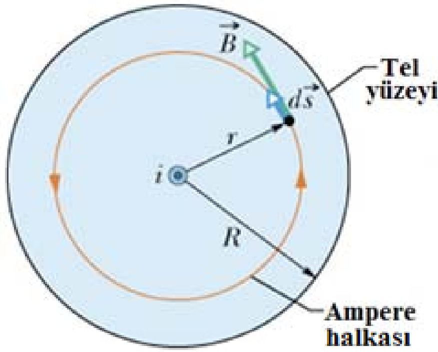



$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$B_a = \frac{\mu_0 i_{iç}}{2\pi a} = \frac{4\pi \times 10^{-7} * 1}{2\pi * \left(1 \times 10^{-3}\right)} = 2 \times 10^{-4}\ \text{T (saat ibrelerinin tersi yönünde)}$$

$$B_b = \frac{\mu_0 i_{iç}}{2\pi b} = \frac{4\pi \times 10^{-7} * (3-1)}{2\pi * \left(3 \times 10^{-3}\right)} = 1.33 \times 10^{-4}\ \text{T (saat ibreleri yönünde)}$$

# Uzun Bir Telin İçindeki Manyetik Alan :




Teldeki akımın, tel kesitine düzgün dağıldığını kabul edelim. Telin taşıdığı akım $i$ ve yarıçapı $R$ dir. Tel ile aynı merkezli, $r$ ($r < R$) yarıçaplı bir Amper halkası seçelim. Manyetik alanın büyüklüğü çemberin üzerindeki her noktada aynıdır ve yönü çembere teğettir. Bu durumda manyetik alan,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl \cos 0 = B \oint dl = 2\pi r B$$

$$i_{iç} = i \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = i \frac{r^2}{R^2}$$

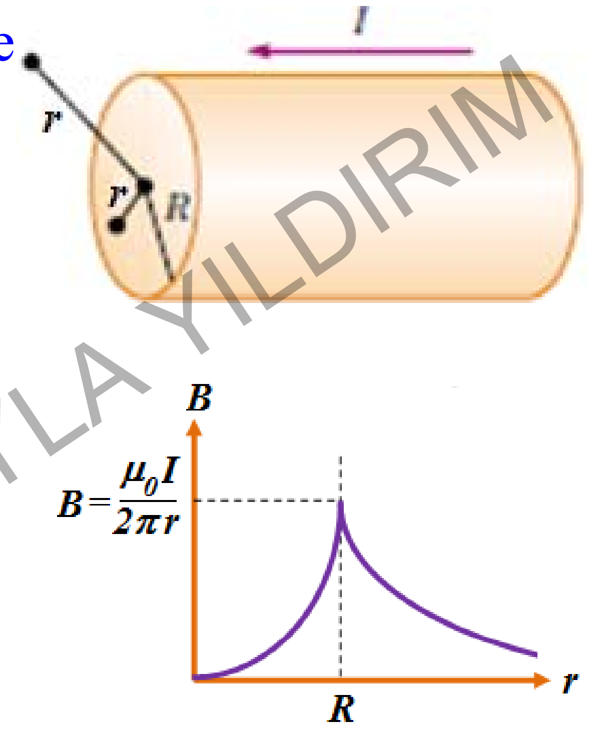
$$2\pi r B = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2} \rightarrow B = \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} \right) r$$

Amper halkasını telin dışında seçersek: $\mu_0 i_{iç} = \mu_0 i$ olur

ve telin dışındaki manyetik alan:

$B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ ifadesine sahip olur.

**Örnek :** Yarıçapı $R$ olan silindir şeklindeki bir iletken, şekilde gösterildiği gibi toplam $I$ akımı taşımaktadır. Telin kesitindeki akım yoğunluğu, $b$ pozitif bir sabit olmak üzere, $J = br$ ifadesi ile verilmektedir. Telin içinde ve dışındaki manyetik alanları bulunuz ve tel ekseninden olan uzaklıkla değişimini çiziniz.




$$I = \int_0^R J(2\pi r dr) = 2\pi b \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi b R^3}{3} \quad \text{(toplam akım)}$$

$r < R$: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl \cos 0 = B \oint dl = 2\pi r B$

$$\mu_0 i_{iç} = \mu_0 \int_0^r J(2\pi r dr) = 2\pi b \mu_0 \int_0^r r^2 dr = \frac{2\pi b \mu_0 r^3}{3}$$

$$2\pi r B = \frac{2\pi b \mu_0 r^3}{3} \rightarrow B = \left(\frac{b\mu_0}{3}\right) r^2 = \frac{3I}{2\pi R^3} \frac{\mu_0}{3} r^2 = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^3}\right) r^2$$

$r > R$: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl \cos 0 = B \oint dl = 2\pi r B$

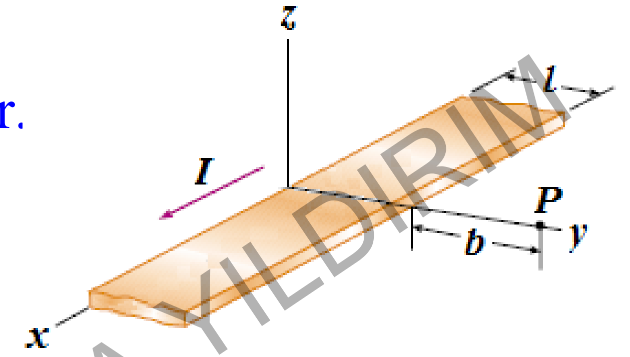
$$\mu_0 i_{iç} = \mu_0 I \rightarrow 2\pi r B = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 b R^3}{3}\left(\frac{1}{r}\right)$$

**ÖDEV :** Yarıçapı $R$ olan silindir şeklindeki bir iletken telden toplam $I$ akımı akmaktadır. Telin kesitindeki akım yoğunluğu, $J_0$ pozitif bir sabit olmak üzere,

$$J = J_0\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

ifadesi ile verilmektedir. Telin içinde ve dışındaki bölgelerde manyetik alanları bulunuz ve tel ekseninden olan uzaklıkla değişimini çiziniz.

**Örnek :** Genişliği $l$ olan çok uzun metal bir şerit, şekildeki gibi $xy$-düzlemindedir ve boyunca toplam $I$ akımı taşımaktadır. $y$-ekseni üzerinde ve şeritin kenarından $b$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasında manyetik alanını bulunuz.



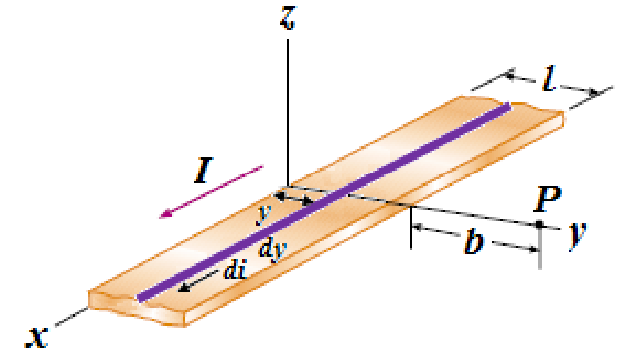

Metal şerit boyunca kalınlığı $dy$ olan sonsuz uzun ince bir tel seçelim. Bu telin taşıdığı akım $di = (I / l)dy$ ve P noktasında oluşturduğu manyetik alan:

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi\left(l+b-y\right)}$$ (pozitif $z$-ekseni yönünde)

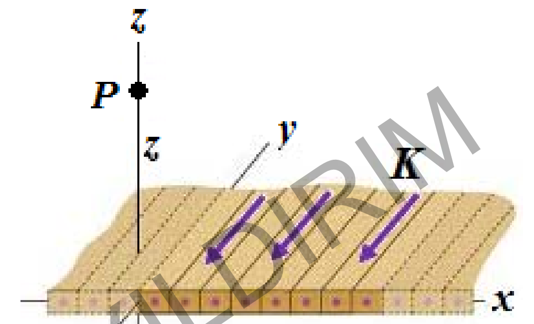
$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\int_0^l \frac{dy}{l+b-y} \quad ; \quad u = l+b-y, \quad du = -dy$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\int_0^l \frac{-du}{u} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi l}\ln\left(l+b-y\right)\Big|_0^l$$

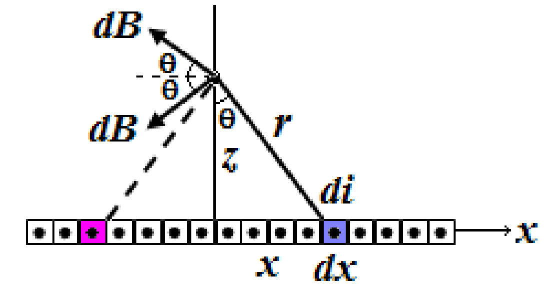
$$B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi l}\ln\left(\frac{b}{l+b}\right) \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\ln\left(\frac{l+b}{b}\right)$$



**Örnek :** Sonsuz genişlikte ve sonsuz uzunlukta çok ince metal bir şerit $xy$-düzlemindedir ve kesitinde birim uzunluk başına $K$ akımı taşımaktadır. Şeritten $z$ kadar yukarıdaki bir $P$ noktasında manyetik alanını bulunuz.




Metal şeritteki kesitinde, $z$-ekseninden $x$ kadar uzakta kalınlığı $dx$ olan sonsuz uzun ince bir tel seçelim. Bu telin taşıdığı akım $di = Kdx$ ifadesine sahiptir ve $P$ noktasında oluşturduğu manyetik alan:




$$dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi r} = \frac{\mu_0 K dx}{2\pi\sqrt{x^2+z^2}} \quad ; \quad \begin{aligned} B_z &= \int dB \sin\theta = 0 \\ B_x &= \int dB \cos\theta \neq 0 \end{aligned}$$

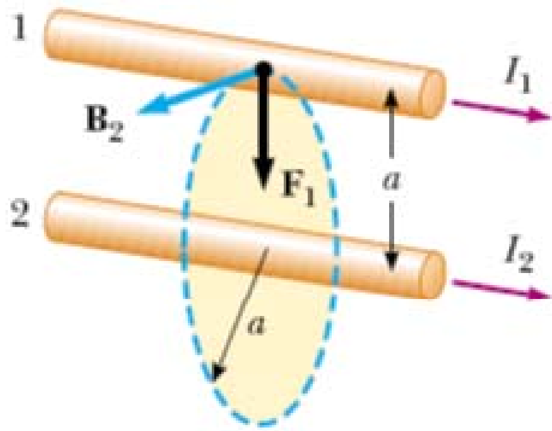
$$B = B_x = \int dB\cos\theta = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}}\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\mu_0 K}{2\pi z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+(x/z)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tan\theta = x/z \\ &\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta = dx/z \end{aligned}\right\} \rightarrow B = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\left[\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 K}{2}$$ (Negatif $x$ doğrultusunda)

# Paralel İki İletken Tel Arasındaki Manyetik Kuvvet :

Manyetik alan içinde bulunan akım taşıyan bir tel üzerine $\vec{F} = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right)$ ifadesi ile tanımlanan manyetik bir kuvvet etkidiğini biliyoruz.



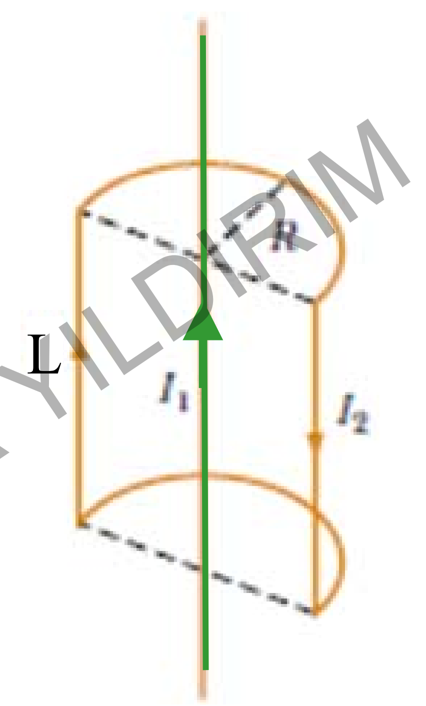

Yanda, aralarında $a$ mesafesi bulunan, aynı yönlerde $I_1$ ve $I_2$ akımları taşıyan sonsuz uzunlukta iki paralel verilmiştir. Her bir tel diğer telin bulunduğu yerde bir manyetik alan oluşturur. Bu nedenle de birbirleri üzerine manyetik kuvvet uygularlar.

$I_2$ akımı taşıyan telin, $I_1$ akımı yaşıyan telin bulunduğu yerde oluşturduğu manyetik alan ve bu alan nedeniyle $I_1$ akımı yaşıyan telin birim uzunluğuna etkiyen manyetik kuvvet, sırasıyla,

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \rightarrow \quad F_{21} = I_1 L\left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right)\sin\left(90^\circ\right) \quad \rightarrow \quad \frac{F_{21}}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

ifadelerine sahiptir. Sağ-el kuralına göre bu kuvvet bir **çekim** kuvvetidir. Tellerin zıt yönlerde akım taşıması durumunda ise bu kuvvet **itici**dir.

**Örnek :** Sonsuz uzunlukta $I_1$ akımı taşıyan bir tel, şekilde gösterildiği gibi, düzgün geometriye sahip $I_2$ akımı taşıyan kapalı bir halka ile kısmen çevrelenmiştir. Halka ekseni ile tel çakışık olduğuna göre, halkaya etkiyen net manyetik kuvveti bulunuz.

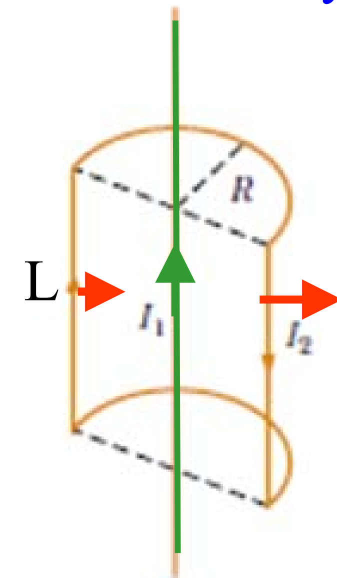


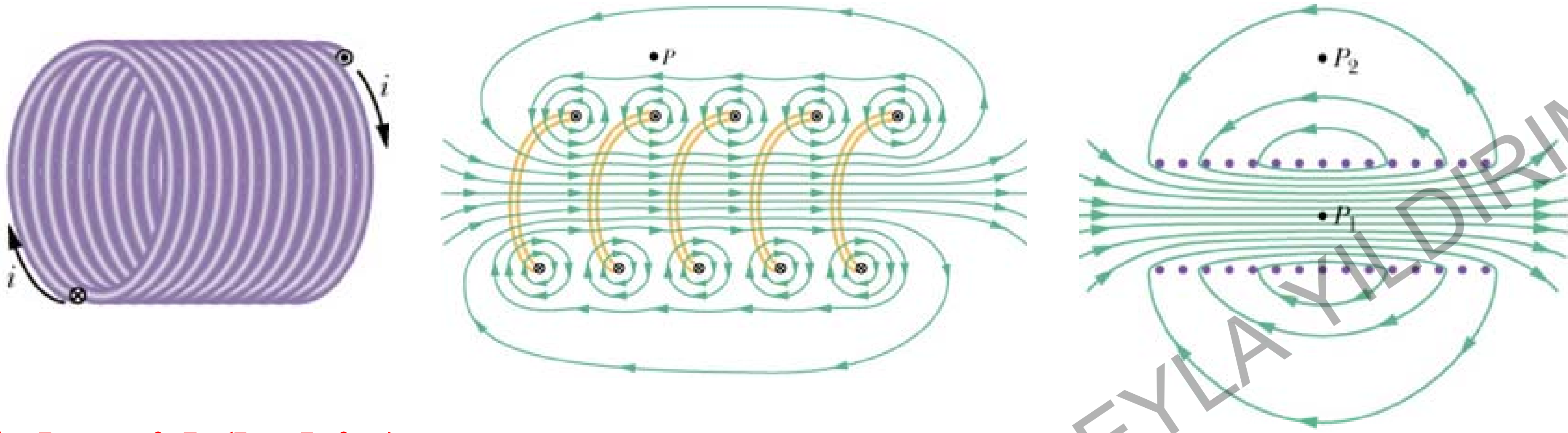

$I_1$ akımı taşıyan sonsuz uzun telin oluşturduğu manyetik alan saat ibrelerinin tersi yönünde çevreseldir. Bu nedenle, kapalı halkanın çembersel kısımlarına kuvvet etki etmez. Halkanın düz olan $L$ uzunluğundaki kısımlarına etkiyen manyetik kuvvet:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \rightarrow \quad F_{sol} = I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \quad \text{(sağa doğru)}$$

$$F_{sağ} = I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \quad \text{(sağa doğru)}$$

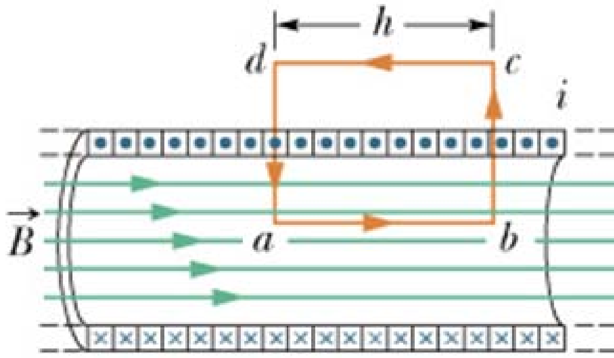
$$\vec{F} = \vec{F}_{sol} + \vec{F}_{sağ} \quad \rightarrow \quad F = \frac{\mu_0 L I_1 I_2}{\pi R} \quad \text{(sağa doğru)}$$






## Solenoid (bobin):

Boyu yarıçapının yanında çok büyük olan yalıtkan bir silindir üzerine yüzlerce veya binlerce defa helis şeklinde sıkıca sarılmış iletken telden oluşur. Böylece solenoid, yanyana sıralanmış çok sayıda çembersel halkadan oluşmuş bir sistem gibi düşünülebilir. Solenoidten $i$ akımı geçtiğinde, solenoidin içinde oluşan manyetik alan solenoid eksenine paraleldir ve yönü sağ-el kuralıyla bulunur. Sağ elin parmak uçları akım yönünü gösterecek şekilde solenoidi sağ avuç içine aldığımızda, başparmağımız solenoidin içinde oluşan manyetik alanın yönünü gösterir. Solenoidin dışındaki manyetik alan ise çok zayıftır ve ideal solenoid için yaklaşık sıfır alınabilir.




Solenoidin içindeki manyetik alanı bulmak için Amper yasasını kullanabiliriz. İdeal bir solenoid için, solenoidin içindeki manyetik alan düzgün, dışındaki manyetik alan ise sıfır kabul edilebilir. Solenoidin birim uzunluğundaki sarım sayısı $n$ olsun.

Amper halkası olarak şekilde gösterilen dikdörtgensel $abcd$ halkasını alalım. Halkanın uzun kenarları solenoidin eksenine paraleldir ve biri solenoidin içinde diğeri ise dışındadır. Amper yasasından:

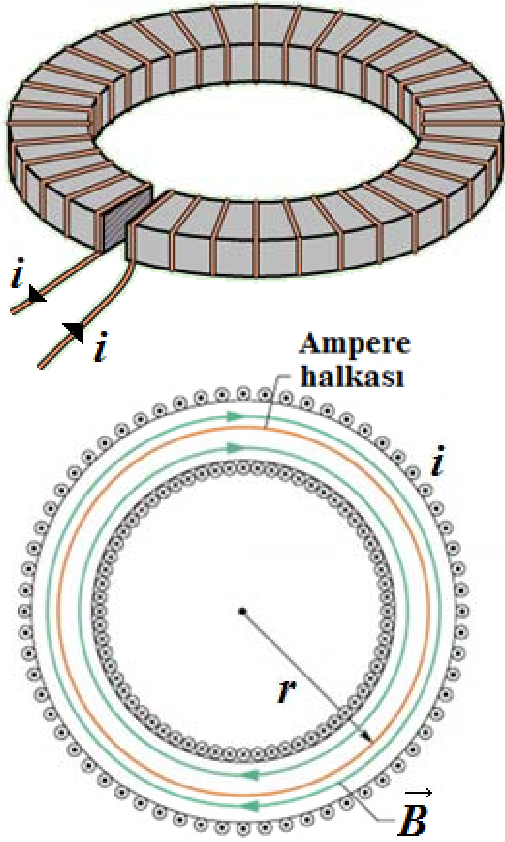
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$\int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b Bdl\cos 0 = B\int_a^b dl = Bh \quad \text{ve} \quad \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = Bh \quad ; \quad i_{\text{iç}} = nhi$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{iç}} \quad \rightarrow \quad Bh = \mu_0 nhi \quad \rightarrow \quad B = \mu_0 ni$$

Toplam sarım sayısı $N$ ve silindirin boyu $L$ olmak üzere $n = N/L$ dir.




# Toroid :

Toroid, ideal bir solenoidin bükülerek simit şekline getirilmesi ile oluşturulabilir. Kesiti aynı olmak koşuluyla, herhangi bir geometriye sahip olabilir. $i$ akımı taşıyan $N$ sarım sayısına sahip bir toroid olsun. Toroid içinde manyetik alan çizgileri, toroid ile aynı merkezli çemberlerdir ve manyetik alan her noktada çemberlere teğettir. Yönü sağ-el kuralıyla bulunur. Sağ-el parmak uçları akım yönünü gösterecek şekilde toroidi kavrarsak, başparmağımız manyetik alan yönünü gösterir. Toroidin dışında ise manyetik alan yaklaşık olarak sıfırdır.

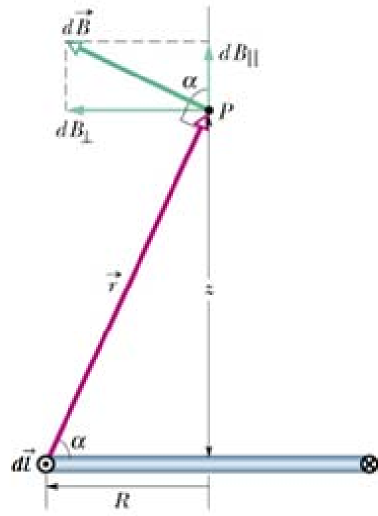
Amper halkası olarak $r$ yarıçaplı bir çember alır ve Amper yasasını uygularsak:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint Bdl\cos 0 = B\oint dl = 2\pi rB \quad \text{ve} \quad i_{\text{iç}} = Ni$$

$$2\pi rB = \mu_0 Ni \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$$

bulunur.

# Manyetik Dipolün Oluşturduğu Manyetik Alan:

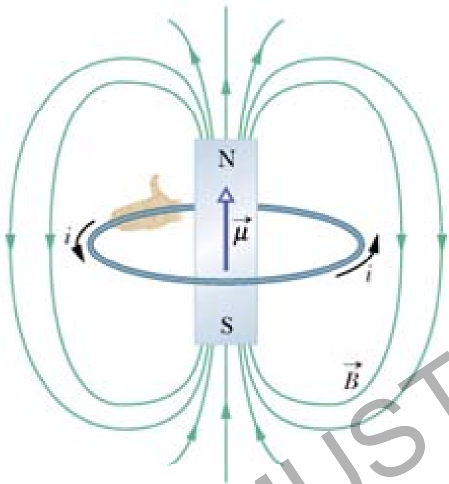



$i$ akımı taşıyan $R$ yarıçaplı çembersel bir halkanın, merkezinden dik olarak geçen $z$-ekseni üzerinde, merkezden $z$ kadar uzaktaki bir $P$ noktasında oluşturduğu manyetik alan,

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

bağıntısı ile verilir. Çemberden çok uzak noktalarda $(z \gg R)$:

$$B \approx \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} * \frac{\pi}{\pi} = \frac{\mu_0 i \ \pi R^2}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 i A}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3}$$




olur. Burada $\mu$, halkanın manyetik dipol momentidir. Vektörel formda manyetik alan:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}$$

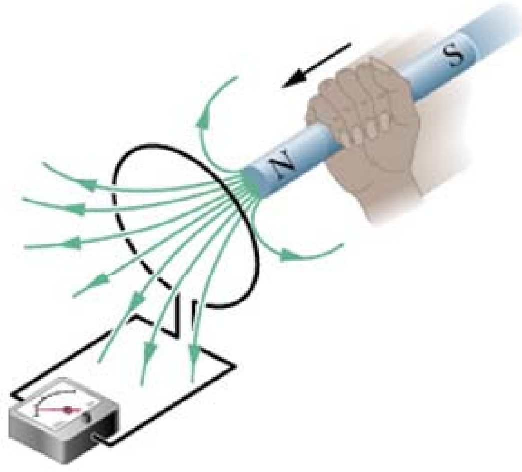
olur. Halkanın oluşturduğu manyetik alan, çubuk mıknatısın oluşturduğu manyetik alanla aynı formdadır.

# BÖLÜM-30
# İndüksiyon ve İndüktans

Bu bölümde aşağıdaki konulara yer verilecektir:

**Faraday indüksiyon yasası**
**Lenz kuralı**
**Manyetik alandaki değişimle indüklenen elektrik alan**
**Öz-indüktans ve karşılıklı indüktans**
***RL* devreleri**
**Manyetik alanda depolanan enerji**

## Faraday' ın Yaptığı Deneyler ve Faraday İndüksiyon Yasası :

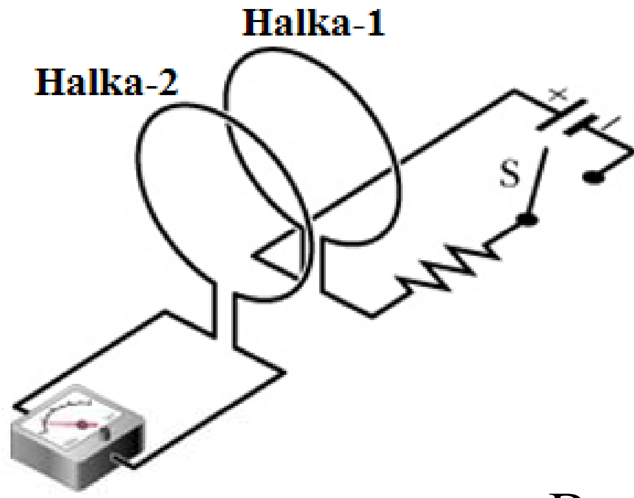



1830' lu yıllarda, İngiltere'de Michael Faraday ve Amerika Birleşik Devletleri'nde Joseph Henry, batarya kullanmadan elektrik akımı üretilebilen önemli deneyler yaptılar. Aşağıda "Faraday indüksiyon yasası" olarak bilinen bağıntıyı elde etmede yardımcı olabilecek bazı deneyler anlatılacaktır.

Yukarıda, duyarlı bir ampermetrenin bağlı olduğu kapalı halka şeklinde bir devre verilmiştir. Devreye kalıcı bir mıknatıs yaklaştırdığımızda, ampermetreden bir akım geçtiği görülür. Yapılan birçok denemeden çıkan sonuçlar şöyle özetlenebilir:

**1.** Halka ile mıknatıs birbirine göre hareketli ise, halkada akım oluşmaktadır.
**2.** Hareket ne kadar hızlı ise, akım o denli şiddetli olmaktadır.
**3.** Hareket yönü tersine çevrilirse veya mıknatısın kutbu değiştirilirse, halkadaki akım da yön değiştirerek ters yönde akar.

Bu şekilde oluşturulan akıma "**indüklenen akım**", halkada oluşan emk' ya "**indüklenen emk**" ve olayın kendisine de "**indüksiyon**" denir.




Yandaki şekilde karşılıklı duran iki halka verilmiştir. 1 nolu halkanın bulunduğu devredeki S anahtarı kapatıldığında veya kapalı iken açıldığında, 2 nolu halkaya bağlı ampermetreden akım geçtiği görülür. 1 nolu halkadaki akım sabit olduğu sürece, 2 nolu halkadan herhangi bir akım geçmez.

Bu iki indüksiyon deneyinde, manyetik alan ya mıknatısla ya da akım geçirilen bir telle oluşturulabilmektedir.

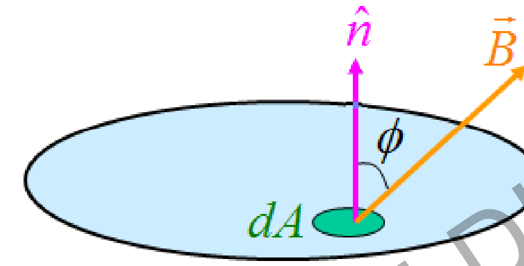
Faraday yaptığı bu deneylerin sonucunu "**Faraday' ın indüksiyon yasası**" olarak bilinen aşağıdaki ifade ile özetlemiştir:

**Kapalı bir halkadan geçen manyetik alan çizgilerinin sayısı değişirse, halkada bir emk oluşur (emk indüklenir).**

Faraday yasası sadece indüksiyonu açıklamakla kalmaz aynı zamanda indüksiyonun tarifini de yapar. Maxwell' in elektromanyetizma ile ilgili dört denkleminden birisidir.

# Manyetik Akı ($\Phi_B$):

Kapalı bir halkanın sınırladığı bir yüzeyden geçen manyetik akı şu şekilde bulunur:




$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

**1.** Kapalı halkanın sınırladığı yüzey, alanı $dA$ olan sonsuz küçük yüzey elemanına bölünür.

**2.** Her bir yüzey elemanından geçen manyetik akı hesaplanır: $d\Phi_B = BdA\cos\phi$.

Burada $\phi$, $dA$ elemanının bulunduğu noktada yüzeyin normali $\hat{n}$ ile manyetik alan $\vec{B}$ arasındaki açıdır.

**3.** Tüm akılar toplanır: $\Phi_B = \int BdA\cos\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ $\quad (\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 \equiv \mathrm{Wb})$.

Eğer halkanın sınırladığı yüzeyden geçen manyetik alan düzgün ise manyetik akı $\Phi_B = \vec{B}.\vec{A} = BA\cos\phi$ ifadesi ile bulunur.

Faraday indüksiyon yasası şu şekilde de tarif edilir:

**İletken halkada indüklenen emk'nın büyüklüğü ($\mathcal{E}$), halkadan geçen manyetik akının ($\Phi_B$) zamanla değişim hızına eşittir.** $\quad \mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

$N$ sarım sayısına sahip bir kangalda indüklenen emk: $\mathcal{E} = -N\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

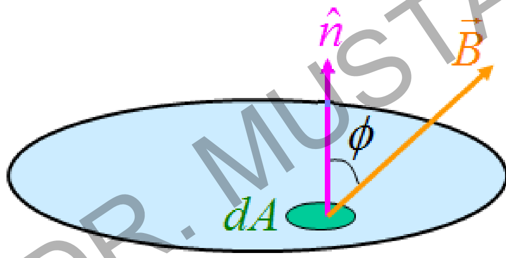
**Bir halkadan geçen akıyı değiştirmenin yolu :**

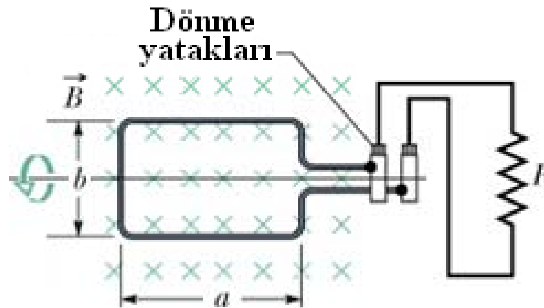
Manyetik alan içerisinde bulunan bir halkadan geçen manyetik akı $\Phi_B$:

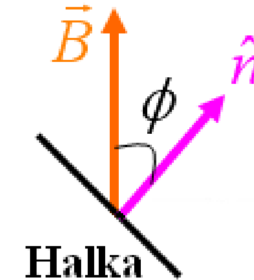
$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int BdA\cos\phi$$

genel ifadesine sahiptir. Bu ifadeye göre, halkadan geçen manyetik akıyı değiştirmenin üç yolu vardır:

1. Halkanın içinde bulunduğu manyetik alanın büyüklüğünü değiştirmek.
2. Manyetik alan içindeki halkanın yüzey alanını değiştirmek.
3. Halkanın yüzey normali $\hat{n}$ ile $\vec{B}$ manyetik alanı arasındaki $\phi$ açısını değiştirmek.



**Örnek :** Kenar uzunluğu 18 cm olan kare şeklindeki bir kangalın sarım sayısı 200 ve toplam direnci 2 Ω' dur. Kangal yüzeyine dik yönde uygulanan manyetik alanın şiddeti 0.8 s içinde 0' dan 0.5 T' ya düzgün olarak artırılmaktadır. Kangalda indüklenen emk' yı ve akımı hesaplayınız.

$$\Delta\Phi = \Phi_s - \Phi_i = B_s A - 0 = 0.5 * (0.18)^2 = 0.0162 \text{ T}\cdot\text{m}^2$$

$$\mathcal{E}_{ind.} = -\frac{N\Delta\Phi}{\Delta t} \rightarrow \left|\mathcal{E}_{ind.}\right| = \frac{200*(0.0162)}{0.8} = 4.05 \text{ V} \rightarrow i_{ind.} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4.05}{2} \cong 2 \text{ A}$$

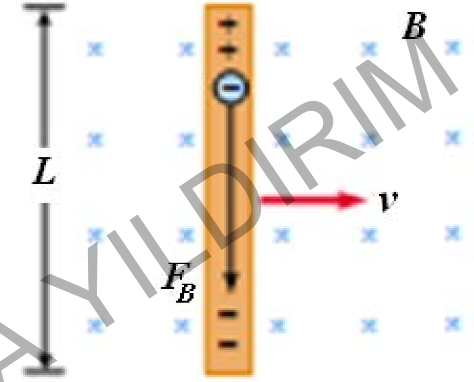
**Örnek :** Yüzey alanı $A$ olan bir kangal, yüzeyine dik yöndeki bir manyetik alan içine konuyor. Manyetik alanın şiddeti, $a$ bir sabit olmak üzere, $B = B_0 e^{-at}$ ifadesine uygun olarak değiştiğine göre, kangalda indüklenen emk' yı bulunuz.

$$\Phi = BA = AB_0 e^{-at} \rightarrow \mathcal{E}_{ind.} = -\frac{d\Phi}{dt} = -AB_0 e^{-at}(-a) = aAB_0 e^{-at}$$

Burada $B_0$ manyetik alanın maksimum değeri,

$aAB_0$ ise indüklenen emk'nın maksimum değeri.

**Örnek :** Uzunluğu $L$ olan bir iletkeni, şekilde gösterildiği gibi, sayfa düzleminden içeri doğru olan düzgün bir manyetik alan içinde alana dik yönde sağa doğru sabit bir $v$ hızıyla hareket ettirelim. İletkenin iki ucu arasında oluşan potansiyel farkını bulunuz.

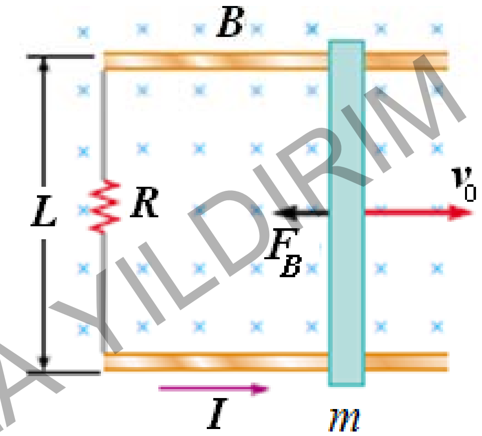



İletken sağa doğru sabit bir hızla hareket ettiğinde, elektronlar aşağıya doğru $F_B = evB$ büyüklüğünde bir kuvvetin etkisinde kalır ve iletkenin iki ucu arasında bir yük ayrışması oluşur. Yük ayrışması sonucunda da iletkenin uçları arasında bir potansiyel farkı oluşur. Bu şekilde iletkenin uçları arasında manyetik kuvvete zıt yönde bir elektrik kuvveti oluşur. Yük kutuplanmasının artışı ile elektrik kuvvetinin değeri de artar. Kararlı denge durumu oluştuğunda:

$$F_B = F_E \quad \rightarrow \quad evB = eE = e\frac{\Delta V}{L} \quad \rightarrow \quad \Delta V = BLv = \varepsilon_{ind}$$

bulunur. Bu potansiyel farka indüklenmiş emk denir.

**Örnek :** Uzunluğu $L$ ve kütlesi $m$ olan bir iletken, şekilde gösterildiği gibi, sayfa düzleminden içeri doğru olan düzgün bir manyetik alan içinde, sürtünmesiz iki iletken ray üzerinde alana dik yönde sağa doğru $v_0$ ilk hızıyla harekete başlıyor. İletkenin hızını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz. İletken telde indüklenen akımı ve emk' yı bulunuz.

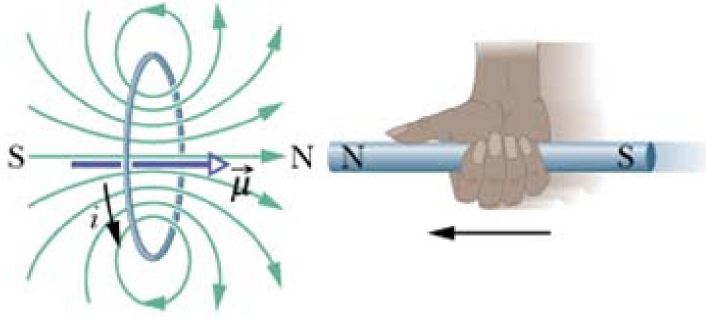



$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -ILB = -\frac{\varepsilon_{ind}}{R}LB = -\left(\frac{BLv}{R}\right)LB \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{mR}dt$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{mR}\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{B^2L^2}{mR}t \quad \rightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$$

$$I = \frac{BLv}{R} = \frac{BL}{R}v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$$

$$\mathcal{E} = IR = BLv_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$$



İndüklenmiş akımın oluşturduğu indüklenmiş $\mathbf{B_i}$ manyetik alan çizgileri

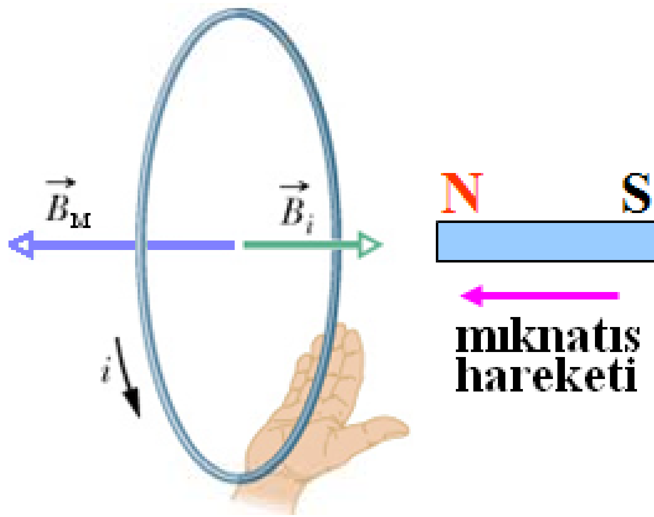
# Lenz Kuralı :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faraday yasasında yer alan (–) işareti, indükleme yoluyla oluşan akımın yönü ile ilgilidir. İndükleme ile oluşan akım ya da emk' nın yönü Lenz kuralına göre belirlenir. Lenz kuralı:

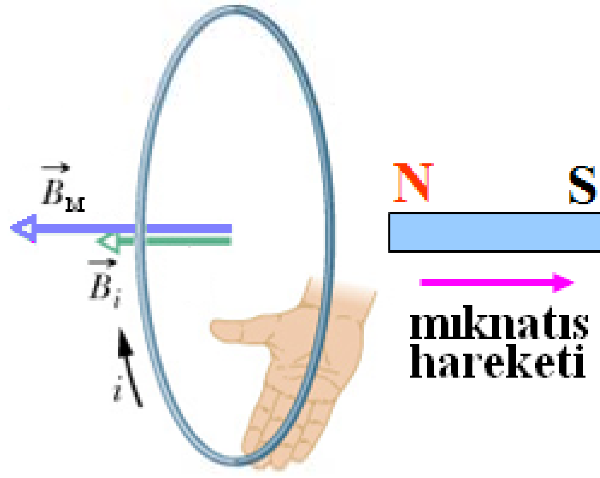
**İndükleme ile oluşan akım, halkadan geçen manyetik akıdaki değişimi engelleyecek şekilde bir manyetik alan oluşturacak yöndedir.**

Şekilde, halkaya yaklaştırılan bir mıknatıs verilmiştir. İndüklenen akım şekilde gösterilen yöndedir. Çünkü, Lenz kuralına göre indüklenen akımın sağa doğru bir manyetik alan oluşturması gerekir. Halka, kuzey kutbu mıknatısın kuzey kutbuna yakın bir mıknatıs gibi düşünülebilir. Bu yüzden, mıknatısın kendisinde mendana getirdiği manyetik akıdaki artışı engelleyebilmek için kendisine yaklaşan mıknatısı itecektir.



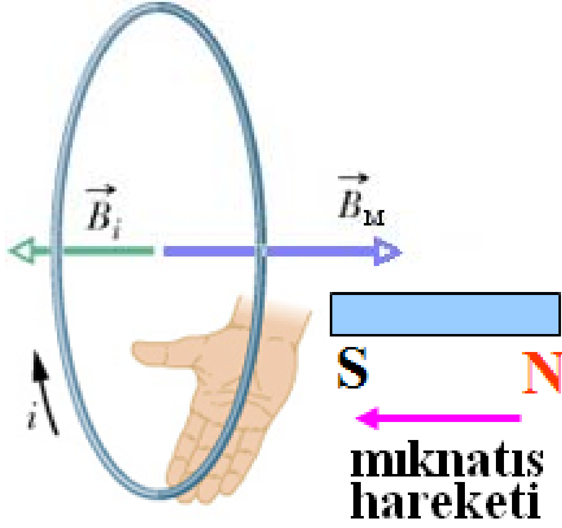

**Örnek - 1 :** Çubuk mıknatısın N kutbunun halkaya yaklaştırılması.

Çubuk mıknatıs halkaya yaklaştırıldıkça, halkanın merkezinde sola doğru oluşturduğu $\vec{B}_M$ manyetik alanının şiddeti zamanla artar. Böylece, halkadan geçen $\Phi_B$ manyetik akısı da artar. Lenz kuralına göre, indüklenen akım saat ibrelerinin tersi yönde akarak sağa doğru $\vec{B}_i$ indüklenmiş manyetik alanını oluşturur ve halkanın merkezindeki net manyetik alan $\vec{B}_{net} = \vec{B}_M - \vec{B}_i$ olur. Böylece, indüklenen akım manyetik akıdaki artışı engellemiş olur.



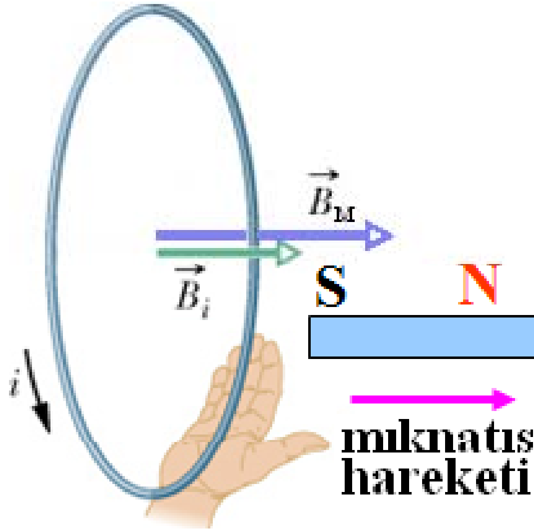

**Örnek - 2 :** Çubuk mıknatısın N kutbunun halkadan uzaklaştırılması.

Çubuk mıknatıs halkadan uzaklaştırıldıkça, halkanın merkezinde sola doğru oluşturduğu $\vec{B}_M$ manyetik alanının şiddeti zamanla azalır. Dolayısıyla, halkadan geçen $\Phi_B$ manyetik akısı da azalır. Lenz kuralına göre, indüklenen akım saat ibreleri yönünde akarak sola doğru $\vec{B}_i$ manyetik alanını oluşturur ve halkanın merkezindeki net manyetik alan $\vec{B}_{net} = \vec{B}_M + \vec{B}_i$ olur. Böylece, indüklenen akım manyetik akıdaki azalmayı engellemiş olur.




**Örnek - 3 :** Çubuk mıknatısın S kutbunun halkaya yaklaştırılması.

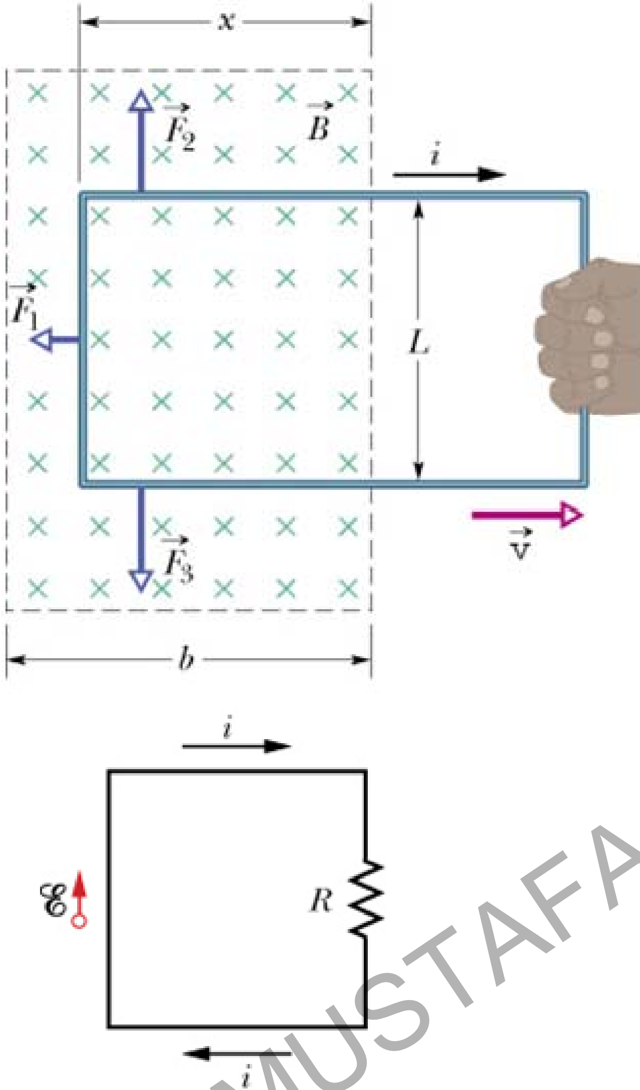
Çubuk mıknatıs halkaya yaklaştırıldıkça, halkanın merkezinde sağa doğru oluşturduğu $\vec{B}_M$ manyetik alanının şiddeti zamanla artar. Böylece, halkadan geçen $\Phi_B$ manyetik akısı da artar. Lenz kuralına göre, indüklenen akım saat ibreleri yönünde akarak sola doğru $\vec{B}_i$ manyetik alanını oluşturur ve halkanın merkezindeki net manyetik alan $\vec{B}_{net} = \vec{B}_M - \vec{B}_i$ olur. Böylece, indüklenen akım manyetik akıdaki artışı engellemiş olur.




**Örnek - 4 :** Çubuk mıknatısın S kutbunun halkadan uzaklaştırılması.

Çubuk mıknatıs halkadan uzaklaştırıldıkça, halkanın merkezinde sağa doğru oluşturduğu $\vec{B}_M$ manyetik alanının şiddeti zamanla azalır. Böylece, halkadan geçen $\Phi_B$ manyetik akısı da azalır. Lenz kuralına göre, indüklenen akım saat ibrelerinin tersi yönünde akarak sağa doğru $\vec{B}_i$ manyetik alanını oluşturur ve halkanın merkezindeki net manyetik alan $\vec{B}_{net} = \vec{B}_M + \vec{B}_i$ olur. Böylece, indüklenen akım manyetik akıdaki azalmayı engellemiş olur.

# İndüksiyon ve Enerji Transferi :

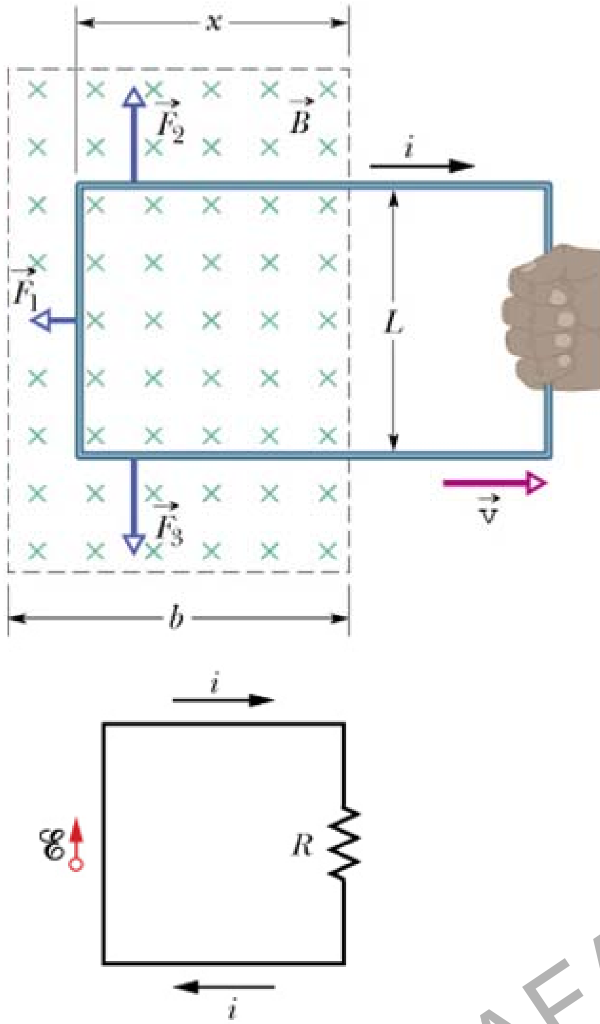



Lenz kuralına göre, indüklenen akım kendisini doğuran dış etkiye bir tepki olarak doğar. Bu nedenle, dış etki manyetik alan-halka sistemi üzerine bir iş yapar. Bu iş halkanın *R* direnci üzerinde ısı enerjisi olarak açığa çıkar.

Şekilde genişliği *L* olan iletken bir halka verilmiştir. Halkanın bir bölümü düzgün B manyetik alanı içindedir ve sabit bir *v* hızıyla alan dışına çıkarılıyor. Herhangi bir anda, halkadaki manyetik akı $\Phi_B = BA = BLx$ ' dir. Halkadaki akının azalma hızı (indüklenen emk) ve indüklenen akım sırasıyla,

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = BL\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad |\mathcal{E}| = BLv \quad \text{ve} \quad i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

ifadelerine sahiptir.




$R$ direnci üzerinde birim zamanda açığa çıkan ısı enerjisi,

$$P_{ısı} = i^2 R = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \qquad \text{(Eş-1)}$$

ile verilir. Halkanın kenarlarına etkiyen manyetik kuvvetler şekil üzerinde gösterilmiştir. $\vec{F}_2$ ve $\vec{F}_3$ kuvvetlerinin toplamı sıfırdır. Halkaya etkiyen tek manyetik kuvvet $\vec{F}_1$ kuvvetidir:

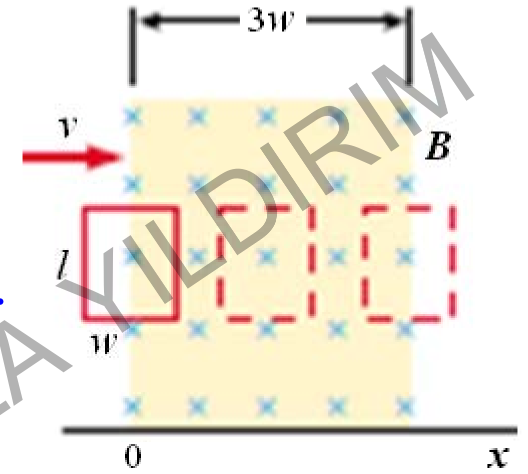
$$\vec{F}_1 = i\vec{L} \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad F_1 = iLB \sin 90° = \frac{BLv}{R} LB = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

Bu durumda, halkayı sabit bir $v$ hızıyla alan dışına çekmek için eşit büyüklükte ve ters yönde bir dış kuvvet uygulamak gerekir. Bu kuvvetin birim zamanda yapacağı iş:

$$P_{dış} = F_1 v = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \qquad \text{(Eş-2)}$$

Eş-1 ve Eş-2 karşılaştırılırsa, halkayı alan dışına çıkarmak için uygulanan dış kuvvetin yaptığı işin, halka üzerinde ısı enerjisine dönüştüğü görülmektedir.

**Örnek :** Kenar uzunlukları $l$ ve $w$ olan dikdörtgensel bir halka, şekildeki gibi, sabit bir $v$ hızıyla sayfa düzleminden içeri doğru olan düzgün bir manyetik alana soldan giriş yaparak sağ taraftan çıkıyor. Manyetik alanın etkin olduğu bölgenin genişliği $3w$' dur. Halkadan geçen manyetik akıyı ve halkada oluşan indüksiyon emk' sını bulunuz ve konumla nasıl değiştiğini çiziniz.



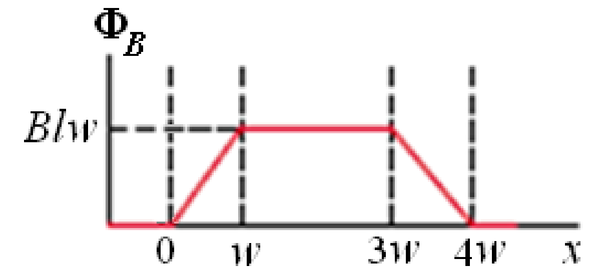

Halka alanın dışında → $\Phi = 0 \quad ; \quad \mathcal{E} = 0$

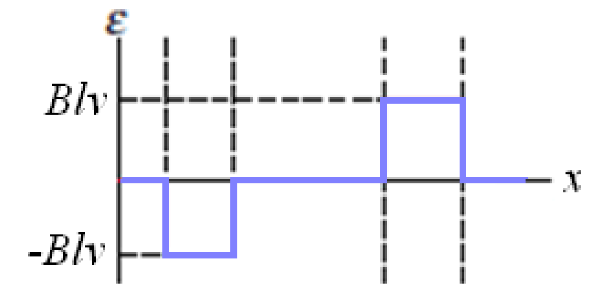
Halkanın $x$ kadarı alanın içinde → $\left.\begin{matrix} \Phi = Blx \\ \mathcal{E} = -Blv \end{matrix}\right\}$

Halkanın tamamı alanın içinde → $\left.\begin{matrix} \Phi = Blw \\ \mathcal{E} = 0 \end{matrix}\right\}$

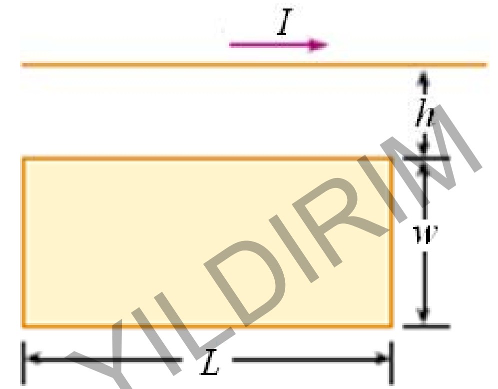
Halkanın $x$ kadarı alanın dışında → $\left.\begin{matrix} \Phi = Bl(w-x) \\ \mathcal{E} = +Blv \end{matrix}\right\}$

Halka alanın dışında → $\Phi = 0 \quad ; \quad \mathcal{E} = 0$



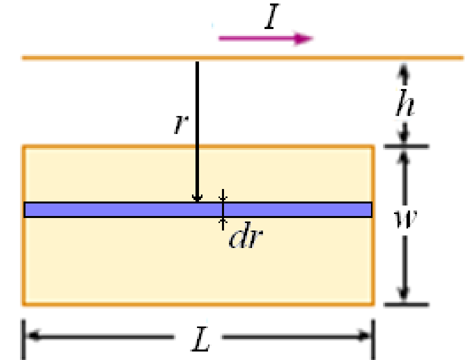
**Örnek :** Kenar uzunlukları $L$ ve $w$ olan dikdörtgensel bir halka, şekildeki gibi, $I$ akımı taşıyan sonsuz uzun bir telden $h$ kadar uzaktadır.




$a-$) Halkadan geçen manyetik akıyı bulunuz.

$b-$) Telden geçen akım, $a$ ve $b$ pozitif sabitler olmak üzere, $I = a + bt$ ifadesine göre değişirse halkada oluşan indüksiyon emk' sının büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

$a-$) Halka üzerinde seçilen şeritten geçen akı:




$$d\Phi = BLdr = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)Ldr \quad \rightarrow \quad \Phi = \frac{\mu_0 LI}{2\pi}\int_h^{h+w}\frac{dr}{r}$$

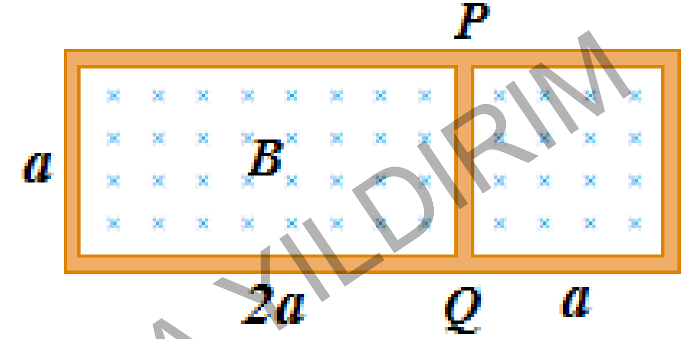
$$\Phi = \frac{\mu_0 LI}{2\pi}\ln\left[r\right]_h^{h+w} = \frac{\mu_0 LI}{2\pi}\ln\left(1+\frac{w}{h}\right)$$

$b-$) $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} \quad \rightarrow \quad \mathcal{E} = -\dfrac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{w}{h}\right)\dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{\mu_0 Lb}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{w}{h}\right)$

Halka içinden geçen akı sayfa düzleminden içeri doğrudur ve büyüklüğü artmaktadır.

İndüklenen emk saat ibrelerinin tersi yönünde akım oluşturacak yöndedir.

**Örnek :** İki kapalı bölmeden oluşmuş iletken bir halka, şekildeki gibi, yüzeyine dik ve sayfa düzleminden içeri doğru yönelmiş bir manyetik alan içindedir. $a =$ 65 cm ve iletkenin birim uzunluğunun direnci 0.1 Ω/m' dir. Manyetik alan şiddeti $B = (1\times10^{-3}\ \text{T/s}) * t$ ifadesine ugun olarak değişiyorsa, $PQ$ kolundan geçen indüksiyon akımını bulunuz.




Büyük halka: $|\mathcal{E}_1| = \dfrac{d\Phi}{dt} = 2a^2 \dfrac{dB}{dt} \quad \rightarrow \quad R_1 = 0.1 * \text{halka çevresi} = 0.1*6a = 0.6a$

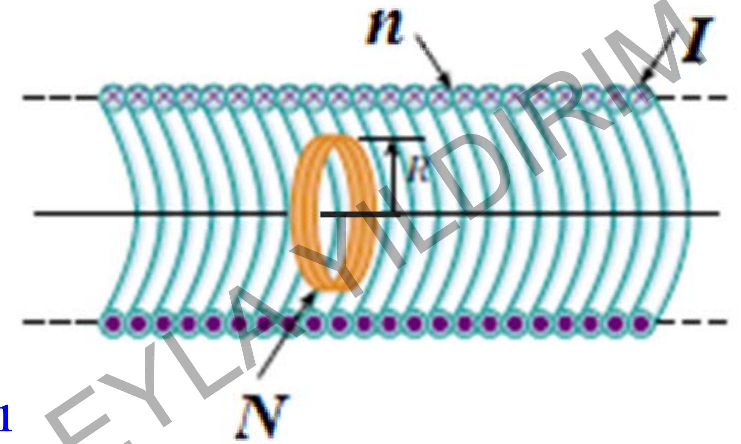
$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} = \frac{2a}{0.6}\frac{dB}{dt} = \frac{2*(0.65)}{0.6}\left(1\times10^{-3}\right) \cong 2.17 \text{ mA (saat ibrelerinin tersi yönünde)}$$

Küçük halka: $|\mathcal{E}_2| = \dfrac{d\Phi}{dt} = a^2 \dfrac{dB}{dt} \quad \rightarrow \quad R_2 = 0.1*4a = 0.4a$

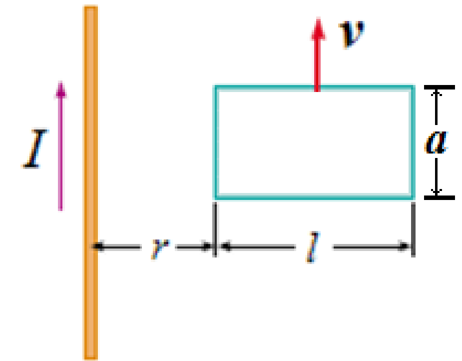
$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} = \frac{a}{0.4}\frac{dB}{dt} = \frac{(0.65)}{0.4}\left(1\times10^{-3}\right) \cong 1.63 \text{ mA (saat ibrelerinin tersi yönünde)}$$

$PQ$ kolundaki ne akım: $i = i_1 - i_2 = 0.54$ mA (saat ibrelerinin tersi yönünde)

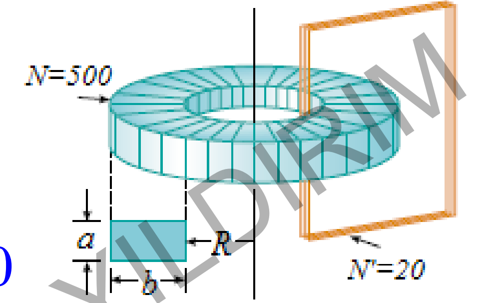
**ÖDEV :** Birim uzunluğunda n tane sarımı olan bir solenoidten geçen akım zamanla $I(t) = I_m(1 - e^{-\alpha t})$ ifadesine uygun olarak değişmektedir. Solenoidin merkezinde ve solenoid ile aynı eksenli $N$ sarım sayısına sahip $R$ yarıçaplı halkada indüklenen emk' yı bulunuz.

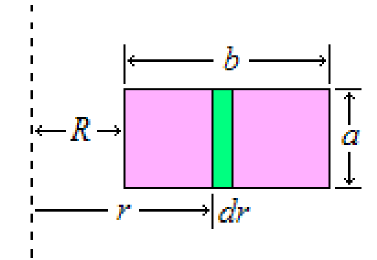



**ÖDEV :** Kararlı $I$ akımı taşıyan sonsuz uzun bir tel ile kenar uzunluğu $l$ ve $a$ olan bir kangal, şekildeki gibi, aralarındaki mesafe $r$ olacak şekilde aynı düzlemde durmaktadır. Kangal sabit bir $v$ hızıyla, akım taşıyan tele paralel kalacak şekilde hareket ettirilirse, kangalda indüklenen emk ne olur?



**Örnek :** Kesitinin kenar uzunlukları $a$ = 2 cm ve $b$ = 3 cm, iç yarıçapı $R$ = 4 cm olan N=500 sarımlı bir toroidin taşıdığı akım $I(t) = 50\sin(120\pi t)$ ifadesi ile değişmektedir. Burada, $t$ saniye ve $I$ Amper cinsindendir. Şekildeki gibi, toroidi çevreleyen N'=20 sarımlı dikdörtgen şeklindeki halkada oluşan indüksiyon emk' sını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.




Toroidin içindeki manyetik alan: $B = \dfrac{\mu_0 IN}{2\pi r}$

Toroidin kesitinden geçen manyetik akı:

$$d\Phi = BdA = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}(a.dr) \rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 INa}{2\pi}\int_R^{R+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 INa}{2\pi}\ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$

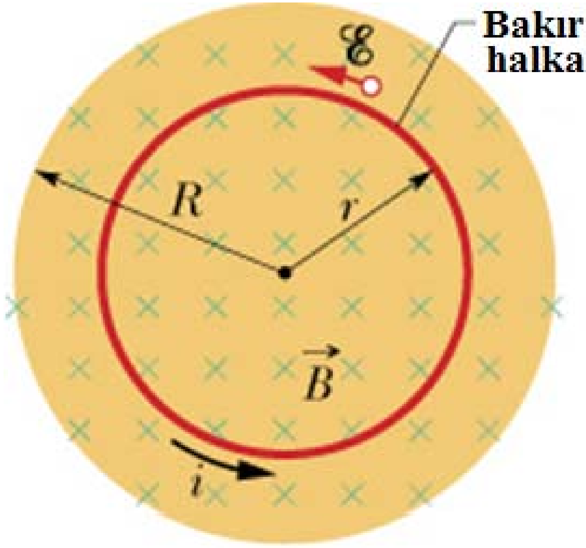
$$\mathcal{E} = -\frac{N' d\Phi}{dt} \rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 NN'a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+b}{R}\right) * \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = 50*120\pi\cos(120\pi t)$$

$$|\mathcal{E}| = \frac{4\pi\times10^{-7}*500*20*0.02}{2\pi}\ln\left(\frac{7}{4}\right)\left[50*120\pi*\cos(120\pi t)\right]$$

$$|\mathcal{E}| = 0.42\cos(120\pi t)$$

# İndüklenen Elektrik Alanlar :



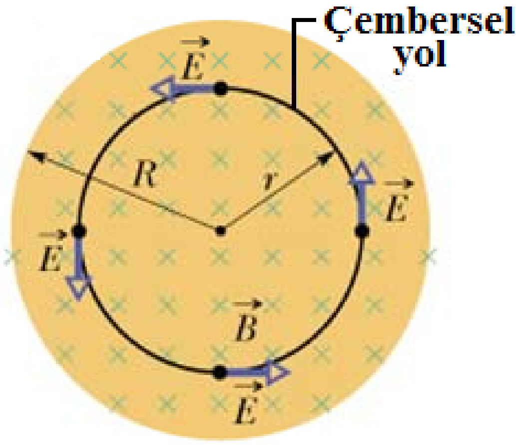

Şekilde, *r* yarıçaplı bakır bir halka verilmiştir. Halka, R yarıçaplı bir bölgede etkin olan, sayfa düzleminden içeri doğru yönelmiş ve şiddeti zamanla artan düzgün bir manyetik alan içindedir. Halkadan geçen manyetik akıdaki değişim nedeniyle indüklenen akımın yönü saat ibrelerinin tersi yönünde olacaktır.

İletken halkada bir *i* akımının olması, iletkenin içindeki elektronların hareket etmesini sağlayan bir $\vec{E}$ elektrik alanının varlığı anlamına gelir. Bu son yorumun da ışığı altında Faraday yasası:

**Değişen manyetik alan bir elektrik alan indükler.**

biçiminde de ifade edilebilir.

**Not :** Bakır halka olmasa bile, indükleme ile bir elektrik alan oluşur.

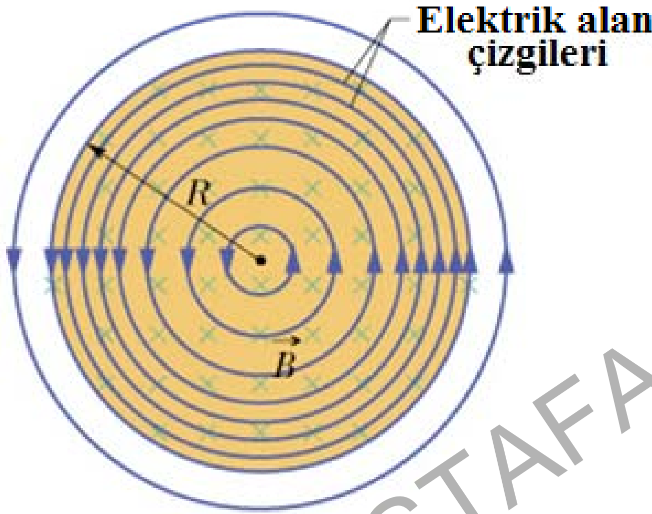



Soldaki şekilde, bakır halka yerine $r$ yarıçaplı çembersel bir yol çizilmiştir. Bu yol boyunca indüklenen emk,

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \text{(Eş-1)}$$

ile verilir. Aynı emk Faraday yasası ile de verilebilir:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{(Eş-2)}$$




Bu iki eşitlik birleştirilirse,

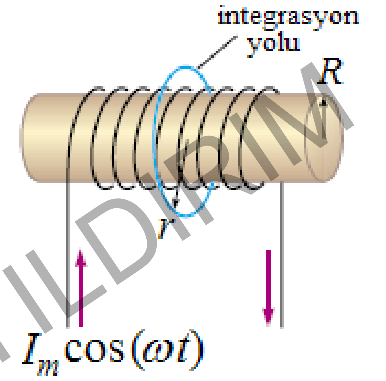
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

bağıntısı elde edilir. Çember üzerinde elektrik alan,

$$\left.\begin{aligned} &\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint Edl \cos 0 = E\oint dl = 2\pi r E \\ &\Phi = \pi r^2 B \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

olarak bulunur.

**Örnek :** Birim uzunluğundaki sarım sayısı $n$ olan $R$ yarıçaplı uzun bir solenoidten geçen akım $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ ifadesine göre değişmektedir. Solenoidin içinde ve dışındaki noktalarda indüklenen elektrik alanını bulunuz.




$$r > R \quad \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow E 2\pi r = -\frac{d(B.A\cos 0)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 nI \ \pi R^2\right)$$

$$E = -\frac{\mu_0 n R^2}{2r}\frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 n R^2}{2r}\left[-\omega I_m \sin(\omega t)\right]$$

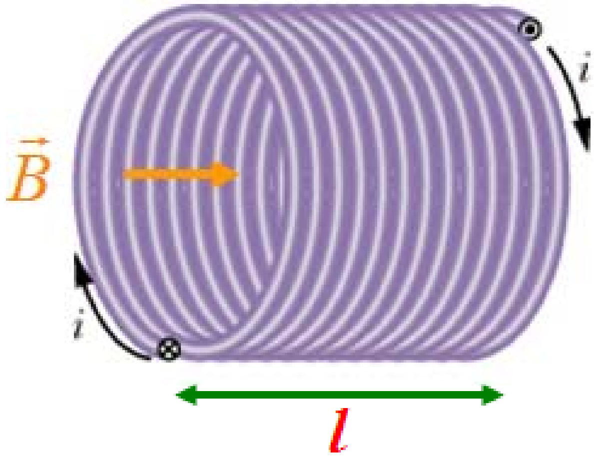
$$E = \left[\frac{\mu_0 n R^2 \omega I_m}{2r}\right]\sin(\omega t) = E_m \sin(\omega t) \quad ; \quad E_m = \frac{\mu_0 n R^2 \omega I_m}{2r}$$

$$r < R \quad \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow E 2\pi r = -\frac{d(B.A\cos 0)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 nI \ \pi r^2\right)$$

$$E = -\frac{r}{2}\mu_0 n \frac{dI}{dt} = \frac{r}{2}\mu_0 n\left[\omega I_m \sin(\omega t)\right]$$

$$E = \left[\frac{\mu_0 n r \omega I_m}{2}\right]\sin(\omega t) = E_m \sin(\omega t) \quad ; \quad E_m = \frac{\mu_0 n r \omega I_m}{2}$$

# İndüktans:




Toplam sarım sayısı $N$, kesit alanı $A$ ve uzunluğu $l$ olan bir solenoidten $i$ akımı geçtiğinde, içindeki manyetik alan $B = \mu_0 ni$ ve solenoidten geçen net manyetik akı $\Phi_B = NBA$ ile verilir. Burada $n$, solenoidin birim uzunluğundaki sarım sayısıdır ($n = N / l$).

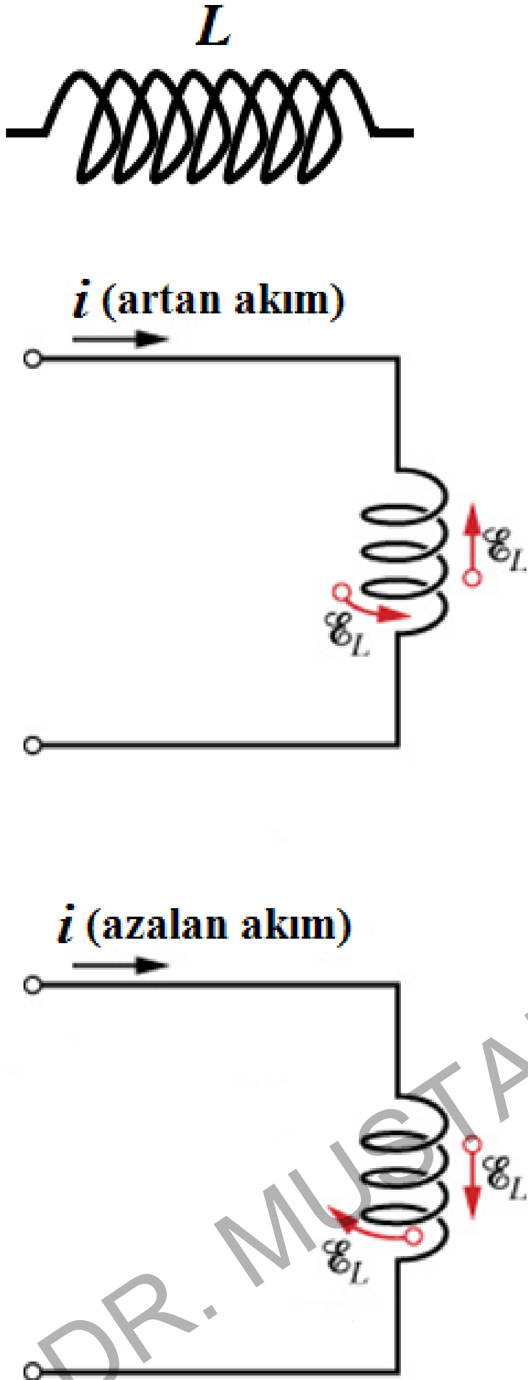
Toplam sarım sayısı $N = nl$ olduğundan net manyetik akı,

$$\Phi_B = N(BA) = N\mu_0 niA = \left(\mu_0 n^2 lA\right)i$$

olacaktır. Net manyetik akının, solenoidten geçen $i$ akımıyla doğru orantılı olduğuna dikkat ediniz. Solenoid için bulunan bu sonuç, herhangi bir indüktör için de geçerlidir ve net manyetik akı: $\Phi_B = Li$ formundadır. Orantı sabiti $L$, indüktörün "indüktans" ı olarak tarif edilir ve ilgili indüktörün geometrisine bağlıdır. Bu durumda solenoidin indüktansı,

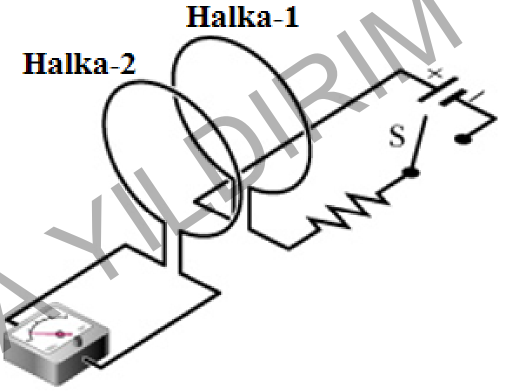
$$L = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 lAi}{i} = \mu_0 n^2 lA \qquad \left[\mathrm{T.m^2/A \equiv Henry\ (H)}\right]$$

olur.



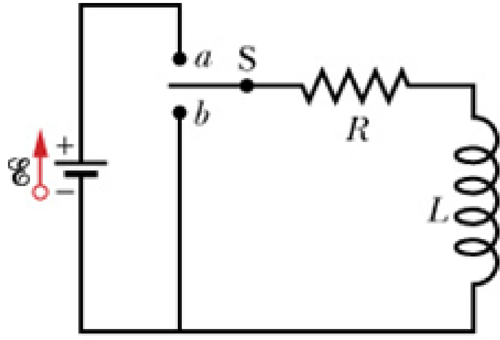

## Öz-İndüksiyon:

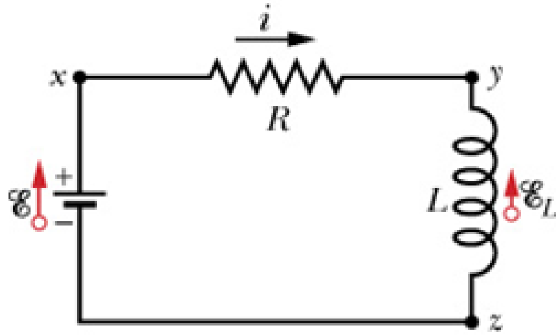
Sağdaki resimde, 1 nolu halkadaki akımın değişmesiyle 2 nolu halkadan geçen manyetik akıdaki değişimin bir emk indüklediğini daha önce gördük.




Bir indüktör üzerinden geçen akım zamanla değişiyorsa, indüktörden geçen net manyetik akı da, $\Phi_B(t) = Li(t)$ bağıntısı uyarınca zamanla değişir. Böylece, Faraday yasasına göre indüktörde "öz-indüksiyon emk" sı olarak bilinen bir emk indüklenir:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$




# RL Devreleri :

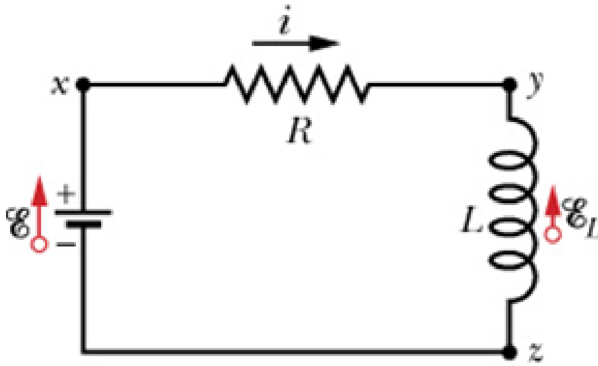
Yanda seri bağlı bir $R$ direnci ile indüktansı $L$ olan bir indüktör verilmiştir. $L$' nin açık ucu emk' sı $\mathcal{E}$ olan bir bataryaya, R' nin açık ucu ise bataryanın diğer ucuna bir S anahtarı le bağlıdır. Başlangıçta açık olan anahtar $t = 0$ anında $a$ noktası ile temas ettirilerek devre tamamlanıyor. $x$ noktasından başlayarak saat ibreleri yönünde Kirchhoff' un çevrim kuralını uygularsak,

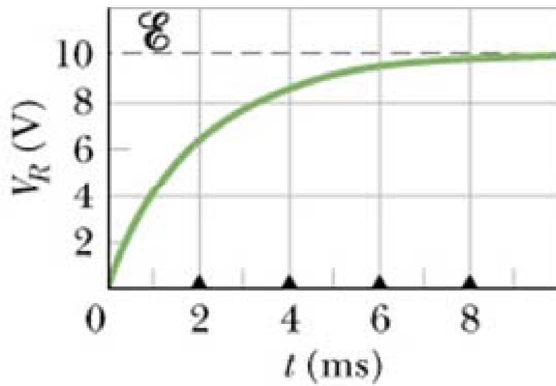
$$-iR - L\frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0 \rightarrow L\frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E}$$

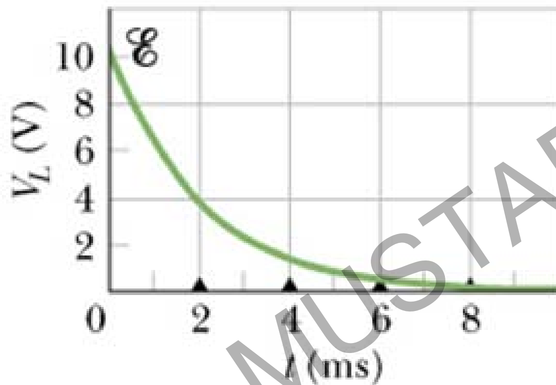
$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} \rightarrow \frac{di}{\mathcal{E} - iR} = \frac{dt}{L} \rightarrow \int_0^i \frac{di}{\mathcal{E} - iR} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

$$-\frac{1}{R}\ln\left(\mathcal{E} - iR\right)\Big|_0^i = \frac{t}{L} \rightarrow i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Burada, $\tau = L/R$ ile verilir ve $RL$ devresinin "zaman sabiti" dir. $T_{1/2} = \frac{L}{R}\ln 2$ niceliği ise $RL$ devresinin yarılanma ömrü olarak bilinir.




$\tau = L/R$ olmak üzere, herhangi bir $t$ anında,

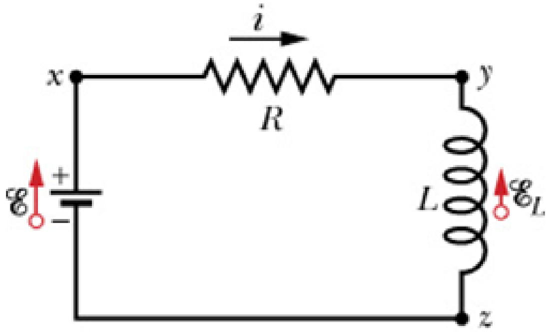
Devreden geçen akım: $i(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

Direncin uçları arasındaki gerilim: $V_R = iR = \mathcal{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

İndüktörün uçları arasındaki gerilim: $V_L = L\dfrac{di}{dt} = \mathcal{E}e^{-t/\tau}$

bağıntıları ile verilir. $t = 0$ anında, beklentilere uygun bir şekilde devreden geçen akım sıfırdır ($i = 0$). Anahtar kapatıldıktan uzunca bir süre sonra ($t \to \infty$), devredeki akım $i_{\max} = \mathcal{E}/R$ ile verilen maksimum değerine ulaşır. Tam bu noktada indüktörün kısa devre gibi davrandığını söylemek yanlış olmaz.

## Manyetik Alanda Depolanan Enerji :




Bir kapasitörün palakaları arasındaki bölgede elektrik alanda enerji depolayabildiğimizi biliyoruz. Benzer bir mantıkla, bir indüktörün içindeki manyetik alanda da enerji depolayabiliriz. Yandaki devre için Kirchhoff ' un çevrim kuralını uygularsak,

$$\mathcal{E} = iR + L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt}$$

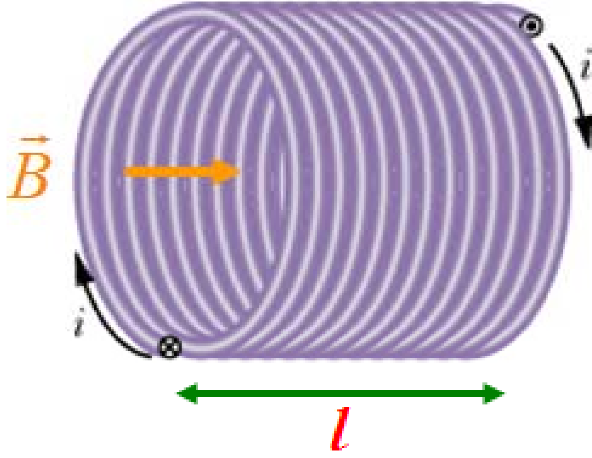
bulunur. $\mathcal{E}i$ terimi, bataryanın birim zamanda devreye sağladığı enerjiye karşılık gelir. $i^2R$ terimi, birim zamanda direnç üzerinde açığa çıkan ısı enerjisini temsil eder. Son terim ise, enerjinin korunumu gereği, birim zamanda indüktörde depolanan manyetik enerjiye karşılık gelir. Bu durumda indüktörde depolanan enerji,

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} \rightarrow dU_B = Lidi$$

$$U_B = \int_o^i Li'di' = \frac{1}{2}L\left[i'^2\right]_o^i \quad \rightarrow \quad U_B = \frac{1}{2}Li^2$$ indüktörde depolanan manyetik enerji

ifadesi ile verilir.

# Manyetik Alanda Enerji Yoğunluğu :




Yanda, birim uzunluğunda $n$ sarım bulunan, kesiti $A$ ve boyu $l$ olan bir solenoid verilmiştir. Solenoidten $i$ akımı geçtiğinde, içinde oluşan manyetik alan $B = \mu_0 ni$ ile verilmektedir. Solenoidin dışındaki manyetik alan ise yaklaşık sıfırdır.

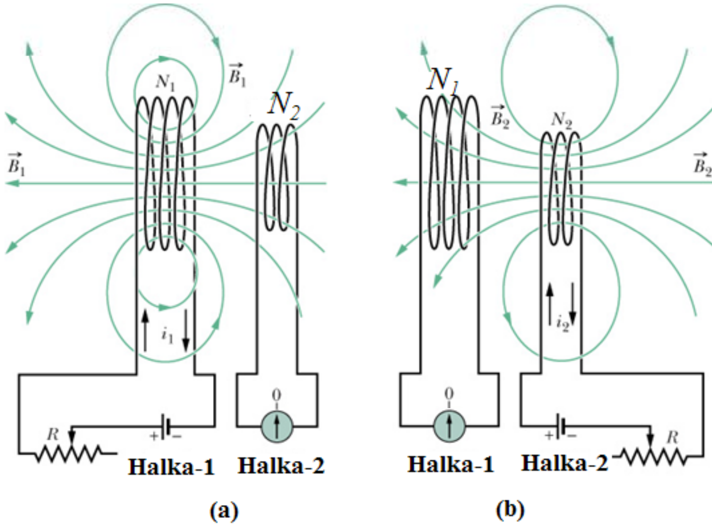
Solenoidte depolanan toplam enerji, $U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\left(\mu_0 n^2 Al\right)i^2$

olduğundan, solenoidin içindeki bölgede birim hacimdeki enerji miktarı, diğer bir deyişle enerji yoğunluğu,

$$u_B = \frac{U_B}{hacim} = \frac{\mu_0 n^2 Ali^2}{2Al} = \frac{\mu_0 n^2 i^2}{2} = \frac{\mu_0{}^2 n^2 i^2}{2\mu_0} \rightarrow u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

olarak bulunur. Solenoid özel durumu için hesaplanmasına rağmen, genel bir bağıntıdır ve manyetik alanın olduğu her durumda doğrudur.

## Karşılıklı İndüktans :




Şekildeki gibi, birbirlerinin oluşturdukları manyetik alan çizgilerinden etkilenebilecek kadar yakın iki indüktör olsun. Şekil-a' da verilen 1 nolu halkadan geçen $i_1$ akımı, 2 nolu halkanın bulunduğu bölgede $B_1$ manyetik alanını oluşturur. Bunun sonucu olarak, 2 nolu halkadan geçen manyetik akı $\Phi_2 = M_{21} i_1$ olur.

$i_1$ akımı zamanla değişirse, 2 nolu halkadan geçen akı da değişir ve

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

ile verilen bir emk indüklenir. Benzer bir yaklaşım kullanılarak, 2 nolu halkadan geçen $i_2$ akımının zamanla değişmesi durumunda (şekil-b), 1 nolu halkadan geçen akı $\Phi_1 = M_{12} i_2$ olmak üzere, 1 nolu halkada indüklenen emk,

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

yazılabilir.

$M_{21}$ ve $M_{12}$ her ikisi de, indüktörlerin birbirine göre konumuna ve geometrilerine bağlı sabitlerdir ve biribirine eşittir ($M_{12} = M_{21} = M$). $M$, iki indüktör arasındaki "**karşılıklı indüktans**" olarak bilinir. SI sistemindeki birimi "henry (H)" dir. Bu durumda indükterlerde indüklenen emk ifadeleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\Phi_1 = Mi_2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}$$

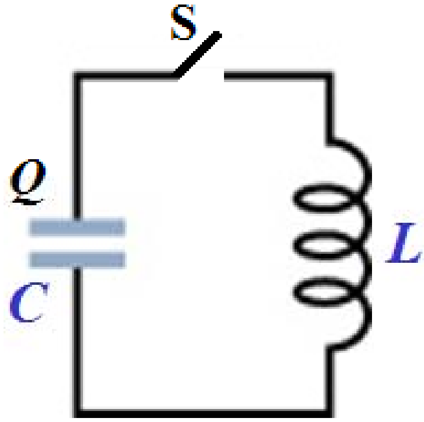
$$\Phi_2 = Mi_1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$

# BÖLÜM-31
# Elektromanyetik Titreşimler
# ve
# Alternatif Akım

Bu bölüm kapsamında aşağıdaki konulara değinilecektir:

***LC*** **deverelerinde elektromanyetik salınımlar**
**Kapasitörlü alternatif akım (AC) devreleri**
***RCL*** **devrelerinde rezonans**
**AC devrelerinde Güç**

# LC Salınımları :




Şekilde bir $C$ kapasitörü ve bir $L$ indüktöründen oluşan devre verilmiştir. Kapasitör başlangıçta doludur ve yükü $Q$ ' dur. $t = 0$ anında S anahtarının kapatılmasıyla, devreden zamanla değişen bir $i$ akımı geçer ve kapasitör indüktör üzerinden boşalmaya başlar.

Herhangi bir anda, kapasitör üzerindeki yük $q$ ve devreden geçen akım $i$ ise, devrenin toplam enerjisi, kapasitör ve indüktördeki enerjilerin toplamı olur:

$$U = U_E + U_B = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}$$

Devredeki iletim kablolarının direnci ihmal edilirse, toplam enerji sabittir.

$$\frac{dU}{dt} = 0 \rightarrow \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{d^2q}{dt^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=0 \;\rightarrow\; \frac{d^2q}{dt^2}+\left(\frac{1}{LC}\right)q=0 \qquad \text{(Eş-1)}$$

Bu ikinci dereceden, homojen bir diferansiyel denklemdir ve çözümü daha önce yapılmıştır. Sürtünmesiz bir yüzey üzerinde titreşim hareketi yapan bir kütle-yay sisteminin hareket denklemi ve çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \qquad \text{(Eş-2)} \quad \rightarrow \quad x(t)=x_m\cos(\omega t+\phi)$$

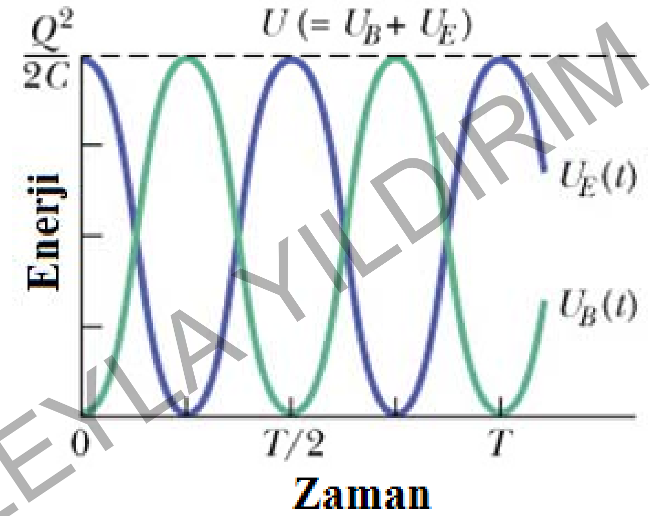
Eş-1 ve Eş-2 karşılaştırıldığında, her iki denklemin de aynı formda olduğu kolayca görülebilir. Buradan hareketle, $LC$ devresini betimleyen ve Eş-1 ile verilen denklemin çözümünden, $\omega=1/\sqrt{LC}$ olmak üzere, kapasitör üzerindeki yük ve devreden geçen akım sırasıyla,

$$q(t)=Q\cos\left(\omega t+\phi\right) \quad \text{ve} \quad i=\frac{dq}{dt}=-\omega Q\sin\left(\omega t+\phi\right)$$

olarak bulunur.

Burada $Q$ maksimum yük ($t=0$ anında kapasitördeki yük miktarı), $\phi$ salınımın faz açısı ve $\omega$ enerji salınım frekansıdır.

Herhangi bir anda kapasitördeki ve indüktördeki enerjiler sırasıyla:




$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$U_B = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\omega^2 Q^2}{2}\sin^2(\omega t + \phi) = \frac{Q^2}{2C}\sin^2(\omega t + \phi)$$

ile verilebilir. Böylece herhangi bir anda toplam enerji:

$$U = U_E + U_B$$

$$U = \left(\frac{Q^2}{2C}\right)\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

olur. Toplam enerji sabittir: "**enerji korunur**".

$t = 0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, ....$ $\rightarrow$ kapasitördeki enerji maksimumdur ( $= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ).

$t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, ....$ $\rightarrow$ indüktördeki enerji maksimumdur ( $= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ).

2 $t = T/8$

3 $t = T/4$

4 $t = 3T/8$

1 $t = 0$

5 $t = T/2$

8 $t = 7T/8$

6 $t = 5T/8$

7 $t = 3T/4$

(a) $i = 0$, $L$, $C$, $U_B$, $U_E$

(b) $i$, $L$, $C$, $U_B$, $U_E$

(c) max $i$, $L$, $C$, $U_B$, $U_E$

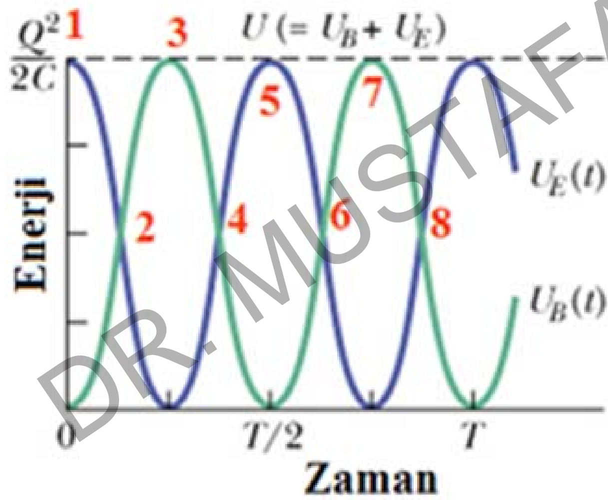
(d) $i$, $L$, $C$, $U_B$, $U_E$

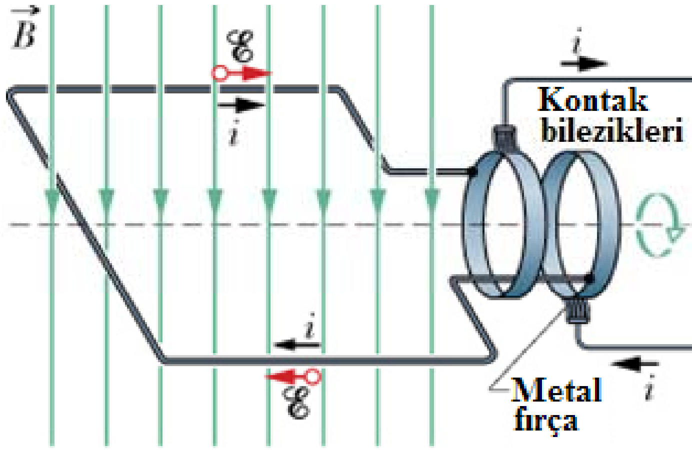
(e) $i = 0$, $L$, $C$, $U_B$, $U_E$

(f) $i$, $L$, $C$, $U_B$, $U_E$

(g) max $i$, $L$, $C$, $U_B$, $U_E$

(h) $i$, $L$, $C$, $U_B$, $U_E$






# Alternatif Akım :

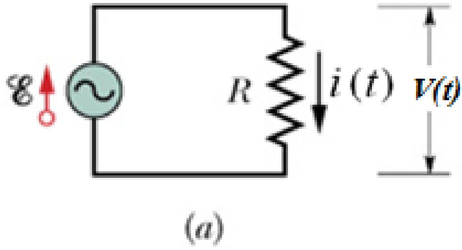
emk' sı sabit olan bir batarya, belli bir doğrultuda sabit bir akım üretir. Bu tür akımlara "**doğru akım**" veya "Direct Current - **DC**" adı verilir.

Sarım sayısı $N$ ve yüzey alanı $A$ olan bir halka, şekildeki gibi düzgün bir manyetik alan içinde iken ekseni etrafında $\omega$ açısal hızıyla döndürülsün. Halkadan geçen akı ve indükleme yoluyla halkada oluşan emk sırasıyla,

$$\Phi_B = NAB\cos\omega t \rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega NAB\sin\omega t = \mathcal{E}_m \sin\omega t$$

olur. Burada, $\mathcal{E}_m = \omega NAB$ kısaltması yapılmıştır. emk' sı dolayısıyla da ürettiği akımın doğrultusu $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ ile verilen bir frekansla periyodik olarak değişiyorsa, bu tür gerilim kaynaklarına "**alternatif akım**" veya "Alternating Current - **AC**" adı verilir. Şehir şebekesinde kullanılan gerilimin maksimum değeri $\mathcal{E}_m \cong 310$ V, frekansı ise $f = 50$ Hz' tir.

# AC devresinde direnç :

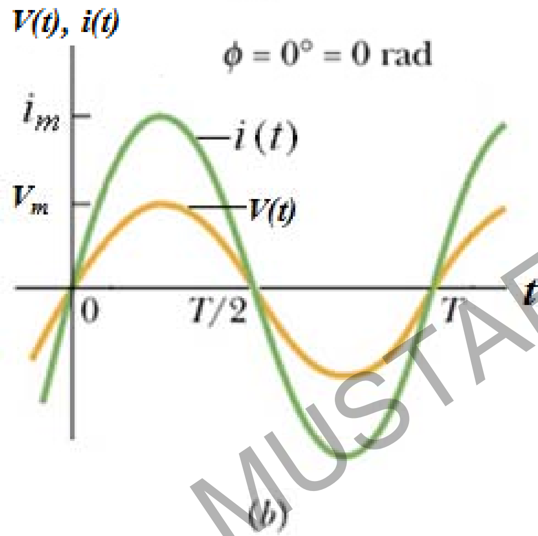


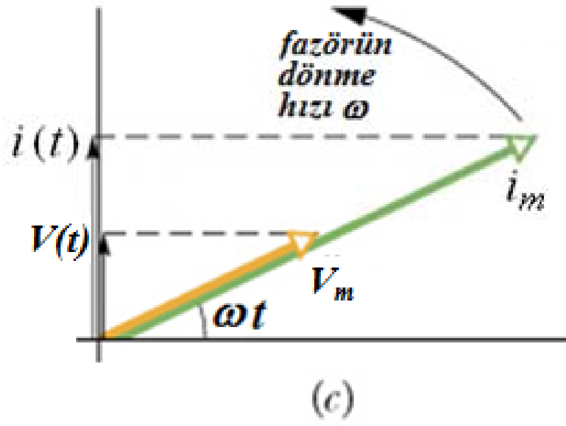

Şekil-*a*' da bir AC üretecine bağlı R direnci verilmiştir. Üreteç gerilimi $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \sin\omega t$ şeklinde değişmektedir. Kirchhoff' un çevrim kuralı uygulanırsa:

$$\mathcal{E}(t) - i(t)R = 0 \quad \rightarrow \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_m}{R}\sin\omega t = i_m \sin\omega t$$

bulunur. Maksimum akım $i_m = \mathcal{E}_m / R$ ifadesine sahiptir. Direncin uçları arasındaki gerilim de $V(t) = \mathcal{E}_m \sin\omega t$ ile verilir. Şekil-*b*' de, direnç üzerinden geçen akım ve direncin uçları arasındaki gerilim zamanın fonksiyonu olarak çizilmiştir. Her iki nicelik de aynı zamanlarda maksimum ve minimum değerlere sahip olduklarından "**aynı fazda**" dır denir.






AC devrelerinde akım ve gerilim, şekil-*c*' deki gibi "**fazör diyagramı**" ile gösterilir. Direnç üzerindeki $V(t)$ gerilimi ve direnç üzerinden geçen $i(t)$ akımı, ismine "**fazör**" denilen dönen vektörlerle gösterilir.

Fazör diyagramının çizilmesinde aşağıdaki noktalara dikkat edilmelidir:

**1.** Fazörler, saat ibrelerinin tersi yönünde $\omega$ açısal hızı ile dönerler.

**2.** Her fazörün uzunluğu, kendi genliği ile orantılıdır.

**3.** Fazörün düşey eksen üzerindeki bileşeni, o niceliğin anlık değerine eşittir.

**4.** Her fazörün dönme açısı, o niceliğin fazına eşittir (Yukarıdaki örnek için faz $\omega t$' dir).

# Direnç için ortalama güç :

$$P(t) = i(t)V(t) = \frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{R}\sin^2 \omega t \quad \rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{R}\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt \quad \rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{2R}$$

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{T}{2}$$

AC gerilimin "kare ortalamasının karekökü" (kok değeri):

$$V_{\text{kok}} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T [V(t)]^2 dt\right]^{1/2} = \left[\frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt\right]^{1/2} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}$$

ile verilir. Bu durumda, $\langle P \rangle = \frac{V_{\text{kok}}^2}{R}$ bulunur. Bu ifade DC

ile aynıdır ve direnç üzerinde ısıya dönüşür.

**Örnek :** Bir üretecin çıkışındaki gerilim $\mathcal{E}(t) = 200\sin(\omega t)$ ifadesine sahiptir. Burada, $t$ saniye ve $\mathcal{E}$ volt cinsindendir. Bu üreteç 100 Ω' luk bir direncin iki ucuna bağlanırsa, direnç üzerinden geçen akımın "kok" değeri nedir?

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{200}{100}\sin(\omega t) = 2\sin(\omega t) \rightarrow i_m = 2 \text{ A}$$

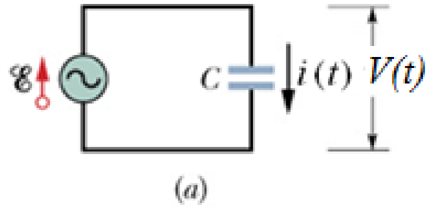
$$i_{kok} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1.41 \text{ V}$$

**Örnek :** Bir üretecin çıkışındaki gerilim $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)$ ifadesine sahiptir. Bu üreteç, bir anahtar vasıtasıyla, 70 Ω' luk bir direncin iki ucuna bağlanmıştır. Anahtar kapatıldıktan sonra $t = 0.01$ s anında direncin uçları arasındaki gerilim $V_R = 0.25\mathcal{E}_m$ ise, üretecin açısal frekansı nedir? Direncin uçları arasındaki gerilim ne kadar zaman sonra aynı değere sahip olur?

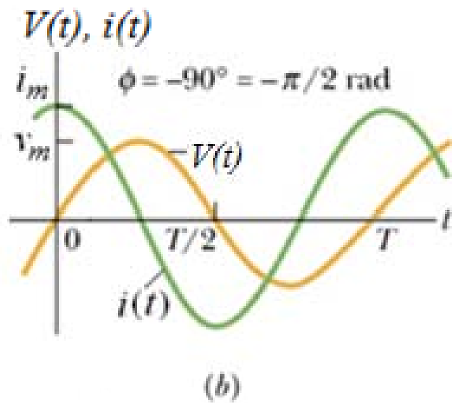
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} \rightarrow V_R = \mathcal{E}_m \sin(\omega t) \rightarrow 0.25\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m \sin(\omega t) \rightarrow \omega t \cong 0.25 \text{ rad}$$

$$\omega = \frac{0.25}{0.01} = 25 \text{ rad/s} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{25} \cong 0.25 \text{ s}$$

# AC devresinde kapasitör :




Şekil-$a$' da, AC üretecine bağlı $C$ sığasına sahip bir kapasitör verilmiştir. Üreteç gerilimi $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_m \sin\omega t$ ifadesi ile verilsin. Kirchhoff' un çevrim kuralı uygulanırsa:

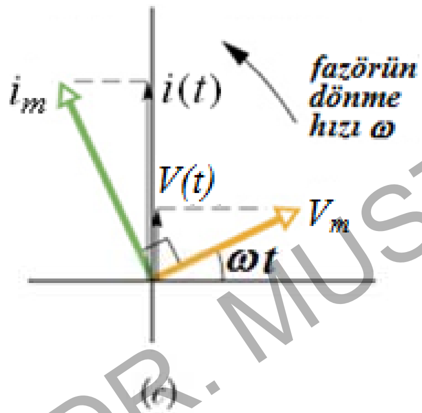



$$\mathcal{E}(t)-\frac{q(t)}{C}=0 \quad \rightarrow \quad q(t)=C\mathcal{E}(t)=C\mathcal{E}_m \sin\omega t$$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\omega C\mathcal{E}_m \cos\omega t \quad \rightarrow \quad i(t)=i_m \sin\left(\omega t+90°\right)$$

bulunur. Maksimum akım $i_m=\omega C\mathcal{E}_m=\dfrac{\mathcal{E}_m}{1/\omega C}$ ifadesine sahiptir.

Burada, $X_C=1/\omega C$ niceliği "sığasal direnç (kapasitif reaktans)" olarak tanımlanır ve birimi ohm ($\Omega$) dur.




Üreteç frekansı çok yüksek ($\omega\rightarrow\infty$) ise kapasitörün kısa devre, çok düşük ise ($\omega\rightarrow 0$) açık devre olduğunu gösterir. Şekil-$b$' de kapasitör akımı ve kapasitör gerilimi zamanın fonksiyonu olarak çizilmiştir. Görüldüğü gibi, akım gerilimin $90^{\circ}$ önündedir.

# Kapasitör için ortalama güç :

$$P = i(t)V(t) = \frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{X_C}\sin\omega t\cos\omega t$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta \quad \rightarrow \quad P = \frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{2X_C}\sin 2\omega t$$

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \quad \rightarrow \quad \langle P\rangle = \frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{2X_C}\frac{1}{T}\int_0^T \sin 2\omega t dt = 0$$

**Not :** Kapasitör ortalamada herhangi bir güç kaybına yol açmaz. titreşimin belli bir zaman diliminde AC üretecinden enerji soğurur, kalan zaman diliminde ise bu enerjiyi kaynağa yeniden verir. Böylece, ortalama olarak güç kullanmaz.

**Örnek :** Sığası 8 $\mu$F olan bir kapasitör, kok değeri 150 V ve 60 Hz frekansında çalışan bir üretecin kutuplarına bağlanmıştır. Devrenin kapasitif reaktansını ve devreden geçen akımın kok değerini bulunuz.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(60)*(8\times10^{-6})} = 332\ \Omega$$

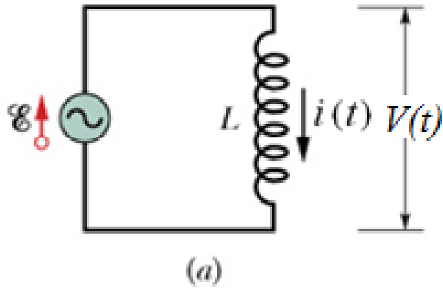
$$i_{kok} = \frac{\mathcal{E}_{kok}}{X_C} = \frac{150}{332} = 0.452\ \text{A}$$

**Örnek :** Bir AC üretecinin maksimum çıkış gerilimi $\mathcal{E}_m = 48$ V ve frekansı da $f = 90$ Hz' tir. Bu üreteç, sığası 3.7 $\mu$F olan kapasitörün plakalarına bağlanırsa, devreden geçen akımın maksimum değeri ne olur?

$$q(t) = C\mathcal{E}(t) = C\mathcal{E}_m \sin(\omega t) \rightarrow i(t) = \omega C\mathcal{E}_m \sin(\omega t) \rightarrow i_m = \omega C\mathcal{E}_m$$

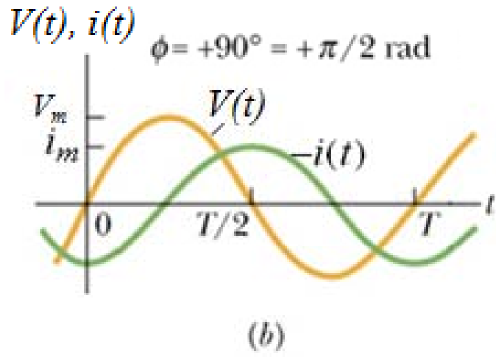
$$i_m = 2\pi fC\mathcal{E}_m = 2\pi(90)(3.7\times10^{-6})(48) = 0.1\ \text{A}$$

# AC devresinde İndüktör (bobin) :




Şekil-*a*' da, AC üretecine bağlı indüktansı $L$ olan bir indüktör verilmiştir. Üreteç gerilimi $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_m \sin\omega t$ ifadesine sahiptir. Kirchhoff' un çevrim kuralı uygulanırsa:

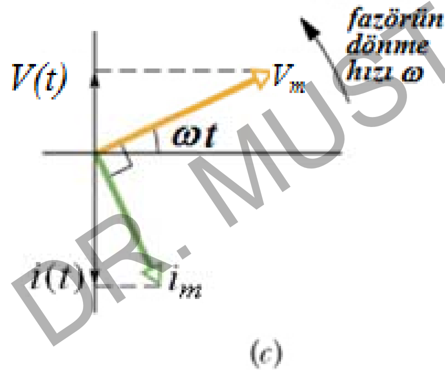
$$\mathcal{E}(t)-L\frac{di}{dt}=0 \;\rightarrow\; \frac{di}{dt}=\frac{\mathcal{E}(t)}{L}=\frac{\mathcal{E}_m}{L}\sin\omega t$$




$$i(t)=\int\frac{\mathcal{E}_m}{L}\sin\omega t dt=-\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L}\cos\omega t \;\rightarrow\; i(t)=i_m\sin(\omega t-90^\circ)$$

bulunur. Maksimum akım $i_m=\mathcal{E}_m/\omega L$ ifadesine sahiptir. Burada, $X_L=\omega L$ niceliği "bobin direnci-indüktif reaktans" olarak bilinir ve birimi ohm (Ω) dur.

Üreteç frekansı çok yüksek $(\omega\rightarrow\infty)$ ise indüktörün açık devre, çok düşük ise $(\omega\rightarrow 0)$ kısa devre olduğunu gösterir. Şekil-*b*' de indüktör akımı ve indüktör gerilimi zamanın fonksiyonu olarak çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, akım gerilimden $90^\circ$ geridedir.



# İndüktör için ortalama güç :

$$P = i(t)V(t) = -\frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{X_L}\sin\omega t\cos\omega t$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta \quad \rightarrow \quad P = -\frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{2X_L}\sin 2\omega t$$

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \quad \rightarrow \quad \langle P\rangle = -\frac{\mathcal{E}_m^{\ 2}}{2X_L}\frac{1}{T}\int_0^T \sin 2\omega t dt = 0$$

**Not :** İndüktör ortalamada herhangi bir güç kaybına yol açmaz. titreşimin belli bir zaman diliminde AC üretecinden enerji soğurur, kalan zaman diliminde ise bu enerjiyi kaynağa yeniden verir. Böylece, ortalama olarak güç kullanmaz.

**Örnek :** İndüktansı 25 mH olan bir indüktör, kok değeri 150 V ve 60 Hz frekansında çalışan bir üretecin kutuplarına bağlanmıştır. Devrenin indüktif reaktansını ve devreden geçen akımın kok değerini bulunuz.

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi(60)*(25\times10^{-3}) = 9.425\ \Omega$$

$$i_{kok} = \frac{\mathcal{E}_{kok}}{X_L} = \frac{150}{9.425} = 15.9\ \text{A}$$

**Örnek :** Bir *RL* devresinde AC üretecinin çalışma frekansı 50 Hz ve ürettiği gerilimin maksimum değeri 100 V' tur. Devreden geçen akımın maksimum değeri 7.5 A ise, indüktörün indüktansını bulunuz.

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \quad \rightarrow \quad L = \frac{\mathcal{E}_m}{2\pi fi_m} = \frac{100}{2\pi(50)*(7.5)} = 0.0424 = 42.4\ \text{mH}$$

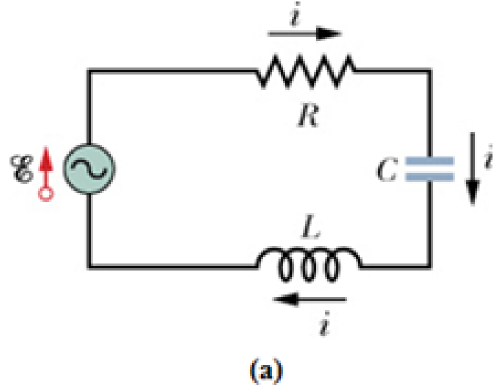
Hangi açısal frekansta maksimum akım 2.5 A olur?

$$\omega = \frac{\mathcal{E}_m}{i_m L} = \frac{100}{(2.5)*(0.0424)} = 943.4\ \text{rad/s}$$

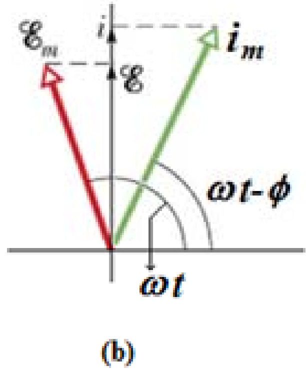
# ÖZET

| Devre Elemanı | Ortalama Güç | Reaktans (Direnç) | Akımın Fazı | Maksimum Gerilim |
|---|---|---|---|---|
| Direnç **$R$** | $\langle P_R \rangle = \dfrac{\mathcal{E}_m^{\,2}}{2R}$ | $R$ | Akım gerilimle **aynı fazda** | $V_{R,m} = i_m R$ |
| Kapasitör **$C$** | $\langle P_C \rangle = 0$ | $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ | Akım gerilimden **90º önde** | $V_{C,m} = i_m X_C = \dfrac{i_m}{\omega C}$ |
| Indüktör **$L$** | $\langle P_L \rangle = 0$ | $X_L = \omega L$ | Akım gerilimden **90º geride** | $V_{L,m} = i_m X_L = i_m \omega L$ |

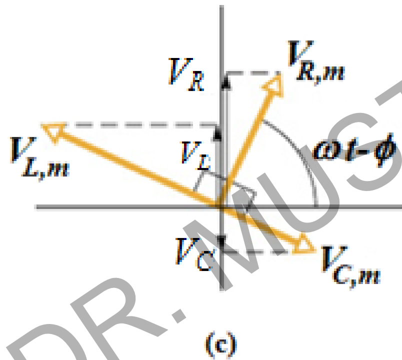
# Seri bağlı *RLC* Devresi :



(a)

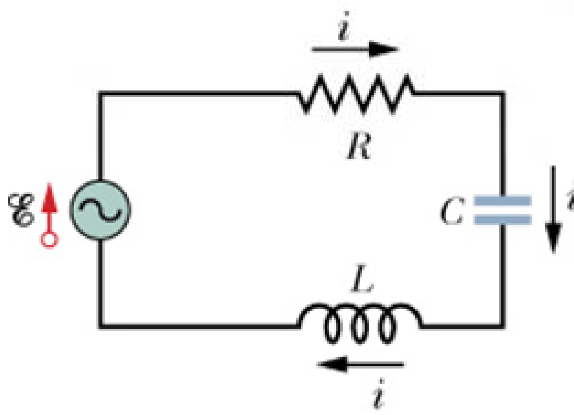


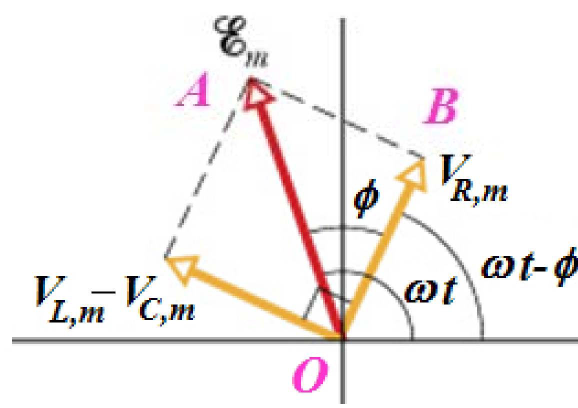
(b)



(c)

Şekil-*a*' da seri bağlı bir *RLC* devresi verilmiştir. AC kaynağının emk' sı $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_m \sin \omega t$ ifadesine uygun olarak değişmekte ve devreye sağladığı akım da $i(t)=i_m \sin(\omega t-\phi)$ şeklinde değişmektedir. Üreteç geriliminin ve devreye sağladığı akımının fazörleri şekil-*b*' de verilmiştir. Devreden geçen $i(t)$ akımı direnç, kapasitör ve indüktör için ortaktır. Şekil-*c*' de direnç, kapasitör ve indüktörün uçları arasındaki gerilimlerin fazörleri birarada verilmiştir. Direnç üzerindeki gerilim akımla aynı fazda, kapasitör üzerindeki gerilim akımdan 90° geride ve indüktör üzerindeki gerilim akımdan 90° öndedir.




$RLC$ devresine Kirchhoff' un çevrim kuralı uygulanırsa: $\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t)$ bulunur. Bu eşitlik yukarıda fazör formunda da verilmiştir. $V_{L,m}$ ve $V_{C,m}$ zıt yönde olduğundan bileşkesi $V_{L,m} - V_{C,m}$ olur. Böylece, $OAB$ dik üçgeninden:

$$\mathcal{E}_m^2 = V_{R,m}^2 + \left(V_{L,m} - V_{C,m}\right)^2 = \left(i_m R\right)^2 + \left(i_m X_L - i_m X_C\right)^2 = i_m^2\left[R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2\right] \rightarrow$$

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} \quad \text{veya} \quad i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

bulunur. Paydadaki terim, $RLC$ devresinin "**empedansı**" dır ve $Z$ ile gösterilir:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} \quad \text{veya} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

birimi Ω'dur.

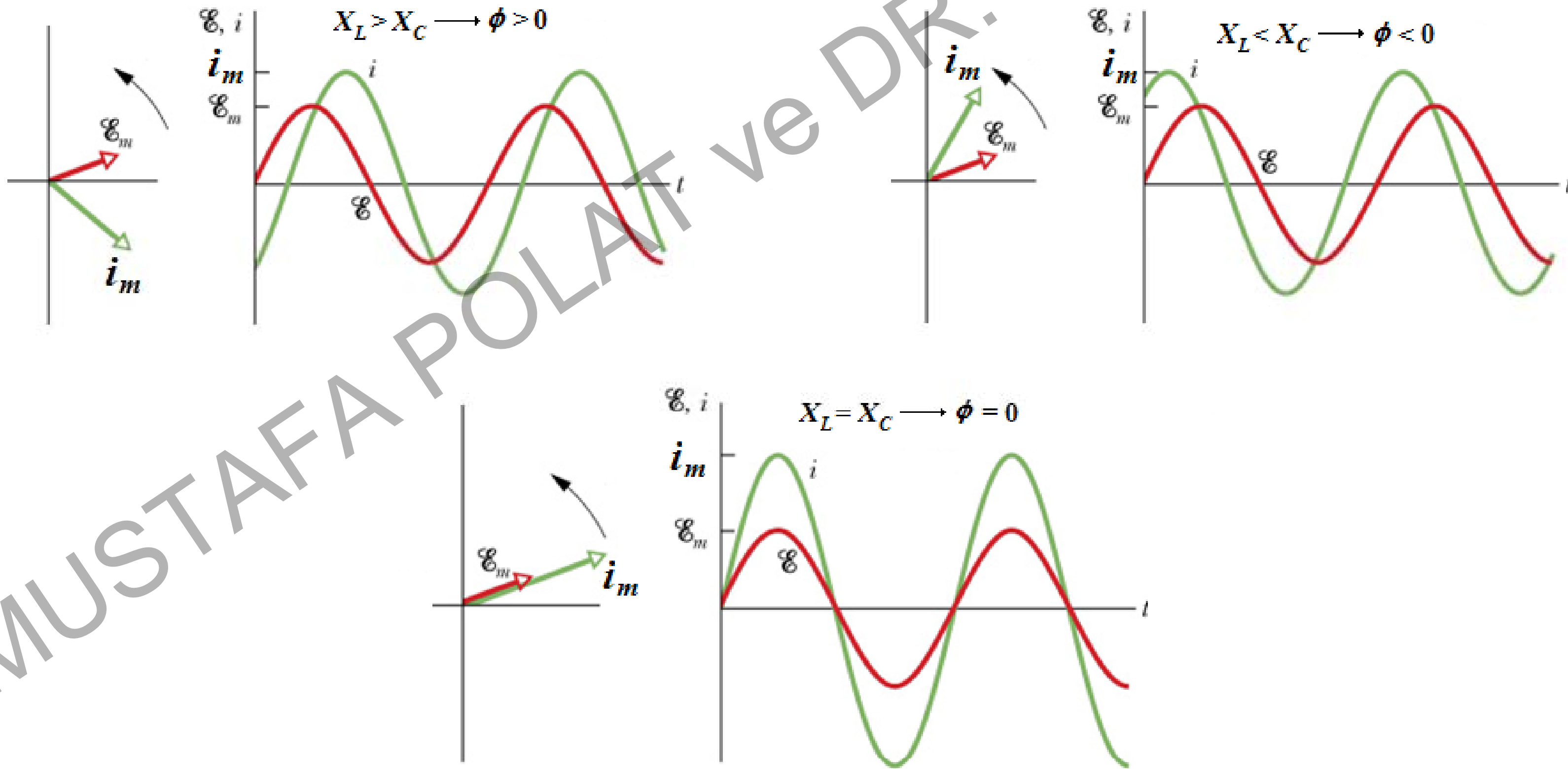
$OAB$ dik üçgeninden: $\tan\phi = \dfrac{V_{L,m} - V_{C,m}}{V_{R,m}} = \dfrac{i_m X_L - i_m X_C}{i_m R} = \dfrac{X_L - X_C}{R}$

bulunur. Devrenin fazı, $X_L$ ve $X_C$' nin alacağı değerlere bağlıdır:

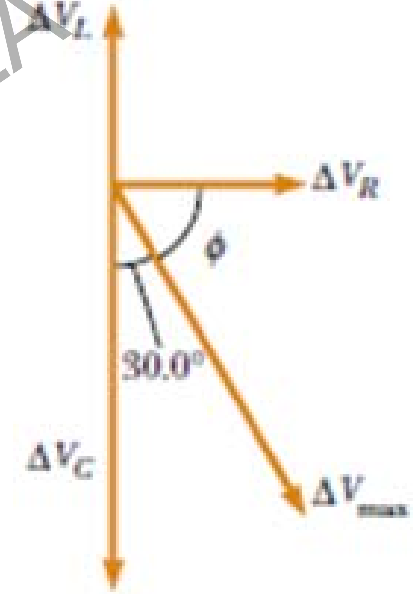
**1.** $X_L > X_C \rightarrow \phi > 0$ Akımın fazı gerilimin fazından geridedir, devre indüktiftir.

**2.** $X_C > X_L \rightarrow \phi < 0$ Akımın fazı gerilimin fazının önündedir, devre kapasitiftir.

**3.** $X_C = X_L \rightarrow \phi = 0$ Akım ve gerilim aynı fazdadır.



**Örnek :** Bir $RLC$ devresinde AC üretecinin çalışma frekansı 60 Hz ve ürettiği gerilimin maksimum değeri 120 V' tur. Devrede $R = 200\ \Omega$, $C = 4\ \mu$F ve $L$ değişkendir. $L$' nin hangi değerinde, kapasitörün uçları arasındaki gerilim üretecin geriliminden $30^{o}$ geride kalır?




Kapasitörün uçları arasındaki gerilimin üretecin geriliminden $30^{o}$ geride kalması demek, devredeki akım ile gerilim arasındaki faz farkının $-60^{o}$ olması demektir.

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \rightarrow \quad X_L = X_C + R\tan\phi$$

$$2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} + R\tan\phi \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2\pi f}\left[\frac{1}{2\pi fC} + R\tan\phi\right]$$

$$L = \frac{1}{2\pi(60)}\left[\frac{1}{2\pi(60)\left(4\times10^{-6}\right)} + 200\tan(-60)\right] = 0.84\ \text{H}$$

**Örnek :** Maksimum gerilimi 150 V olan ve çalışma frekansı 50 Hz olan bir AC üreteci şekildeki *RLC* devresinin *a* ve *d* uçlarına bağlanmıştır. *a-b*; *b-c*; *c-d* ve *b-d* uçları arasındaki maksimum gerilimleri bulunuz.




$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi(50)*(0.185) \cong 58\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(50)*(65\times10^{-6})} \cong 49\ \Omega$$

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}} = \frac{150}{\sqrt{(40)^2+(58-49)^2}} \cong 3.66\ \text{A}$$

$$V_{R,m} = i_m R = (3.66)*(40) = 146.4\ \text{V}$$

$$V_{L,m} = i_m X_L = (3.66)*(58) = 212.3\ \text{V}$$

$$V_{C,m} = i_m X_L = (3.66)*49 = 179.3\ \text{V}$$

**Örnek :** Bir $RLC$ devresinde; $R = 150\ \Omega$, $L = 250$ mH, $C = 2\ \mu$F, üretecin maksimum gerilimi 210 V ve çalışma frekansı 50 Hz'tir. İndüktif ve kapasitif reaktansları, devrenin empedansını, devredeki maksimum akımı ve akımla gerilim arasındaki faz açısını bulunuz.

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi(50)*(0.25) = 78.5\ \Omega$$

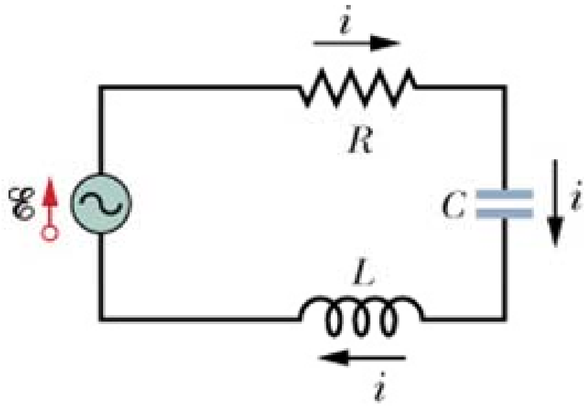
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(50)*\left(2\times10^{-6}\right)} = 1592.4\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(150)^2 + (78.5 - 1592.4)^2} = 1521.3\ \Omega$$

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{210}{1521.3} = 0.138\ \text{A} = 138\ \text{mA}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{78.5 - 1592.4}{150}\right) = -84.4^{\circ}$$

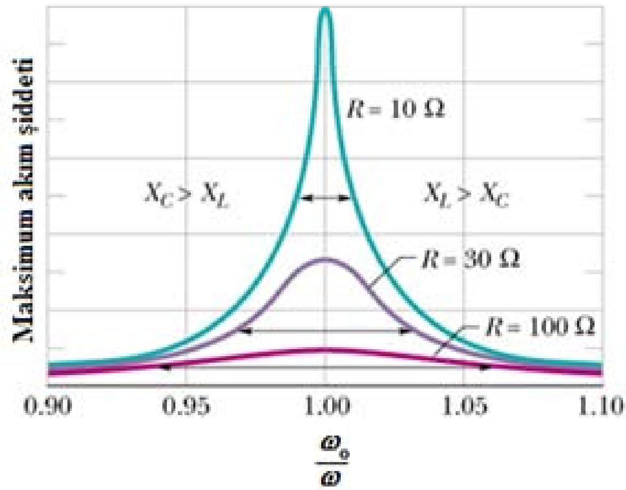
**ÖDEV :** Bir $RLC$ devresinde; $R = 425\ \Omega$, $L = 1.25$ H, $C = 3.5\ \mu$F, üretecin maksimum gerilimi 150 V ve açısal frekansı 377 rad/s' dir. İndüktif ve kapasitif reaktansları, devrenin empedansını, devredeki maksimum akımı ve akımla gerilim arasındaki faz açısını bulunuz.




# Rezonans :

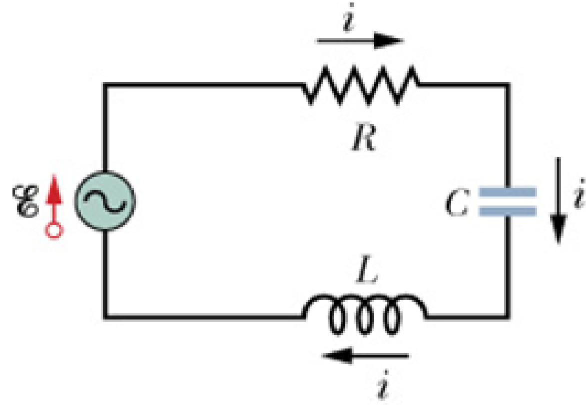
Şekilde verilen *RLC* devresindeki üretecin açısal frekansı $\omega$ olsun ve çok düşük bir değerden yukarı doğru sürekli olarak artırılsın. Devreden geçen akımın genliği,

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$




eşitliği ile verildiğinden, $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0$ olduğunda akımın genliği en büyük olur. Bu durum üretecin açısal frekansı $\omega$, devrenin doğal frekansı $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ değerine eşit olduğunda gerçekleşir. Buna "**rezonans**" durumu denir. Rezonans durumunda, akımın genliği $i_{\text{rez}} = \mathcal{E}_m / R$ olur. Üreteç frekansına karşı çizilen akım genliği "**rezonans eğrisi**" olarak bilinir.

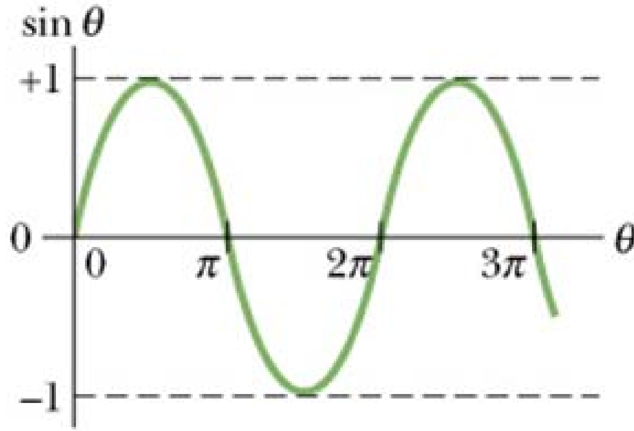
# *RLC* Devresinde Güç :




AC devrelerinde kapasitör ve indüktör tarafından kullanılan ortalama gücün sıfır olduğunu daha önce gördük. Ortalama güç direnç üzerinde harcanır ve şöyle hesaplanır:

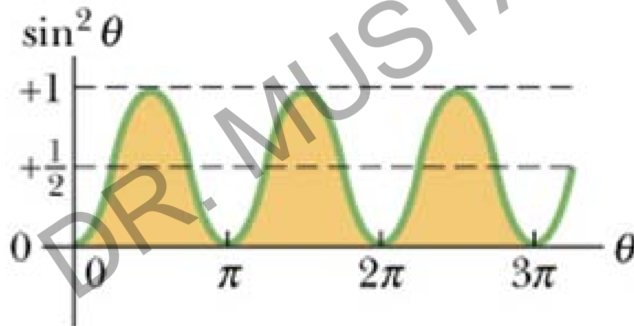
$$P(t) = i(t)^2 R = \left[ i_m \sin(\omega t - \phi) \right]^2 R$$

$$P_{\text{ort}} = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \frac{i_m^2 R}{T}\int_0^T \sin(\omega t - \phi)^2 \, dt = \frac{i_m^2 R}{2} = i_{\text{kok}}^2 R$$




$$P_{\text{ort}} = i_{\text{kok}} R i_{\text{kok}} = i_{\text{kok}} R \frac{\mathcal{E}_{\text{kok}}}{Z} = i_{\text{kok}} \mathcal{E}_{\text{kok}} \frac{R}{Z} = i_{\text{kok}} \mathcal{E}_{\text{kok}} \cos\phi$$

Bu ifadedeki $\cos\phi$, devrenin "güç faktörü" olarak bilinir. $\phi = 0$ durumu $(X_L - X_C)$ rezonans şartıdır ve bu durumda, devrede harcanan güç maksimumdur.




$$\int_0^T \sin(\omega t - \phi)^2 \, dt = \frac{T}{2}$$

**Örnek :** Bir $RLC$ devresinde; $R = 8\ \Omega$, $L = 50$ mH, $C = 5\ \mu$F ve frekansı değiştirilebilen AC kaynağının maksimum gerilimi 400 V' tur. Kaynağın frekansı rezonans frekansının yarısına eşit olduğunda, devreye sağlanan ortalama güç ne kadardır?



$$P_{ort} = i_{kok}\mathcal{E}_{kok}\cos\phi$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\left(50\times10^{-3}\right)*\left(5\times10^{-6}\right)}} = 2000 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} = 1000 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} X_L &= \omega L = 50\ \Omega \\ X_C &= \frac{1}{\omega C} = 200\ \Omega \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = 150.2\ \Omega$$

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{400}{150.2} = 2.66 \text{ A} \quad ; \quad \cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{8}{150.2}$$

$$P_{ort} = i_{kok}\mathcal{E}_{kok}\cos\phi = \frac{i_m}{\sqrt{2}} * \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} * \cos\phi = \frac{(0.2)*(400)}{2} * \left(\frac{8}{150.2}\right) = 28.3 \text{ W}$$

**Örnek :** Bir $RLC$ devresinde; $R = 150\ \Omega$, $L = 20$ mH, üretecin kok değeri 30 V ve frekansı 5000 rad/s' dir. Devredeki akımın maksimum olabilmesi için, bağlanması gereken kapasitörün sığası ne olmalıdır? Devredeki akımın kok değerini hesaplayınız.

Devredeki akım rezonans durumunda maksimum olur.

$$X_L = X_C \quad \rightarrow \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$5000 = \frac{1}{\sqrt{\left(20\times 10^{-3}\right)C}} \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{\left(5000\right)^2 * \left(20\times 10^{-3}\right)} = 2\times 10^{-6} = 2\ \mu\text{F}$$

$$i_{kok} = \frac{\mathcal{E}_{kok}}{Z} = \frac{30}{150} = 0.2 \text{ A} \quad (\text{Rezonans durumunda } Z = R \text{ dir.})$$

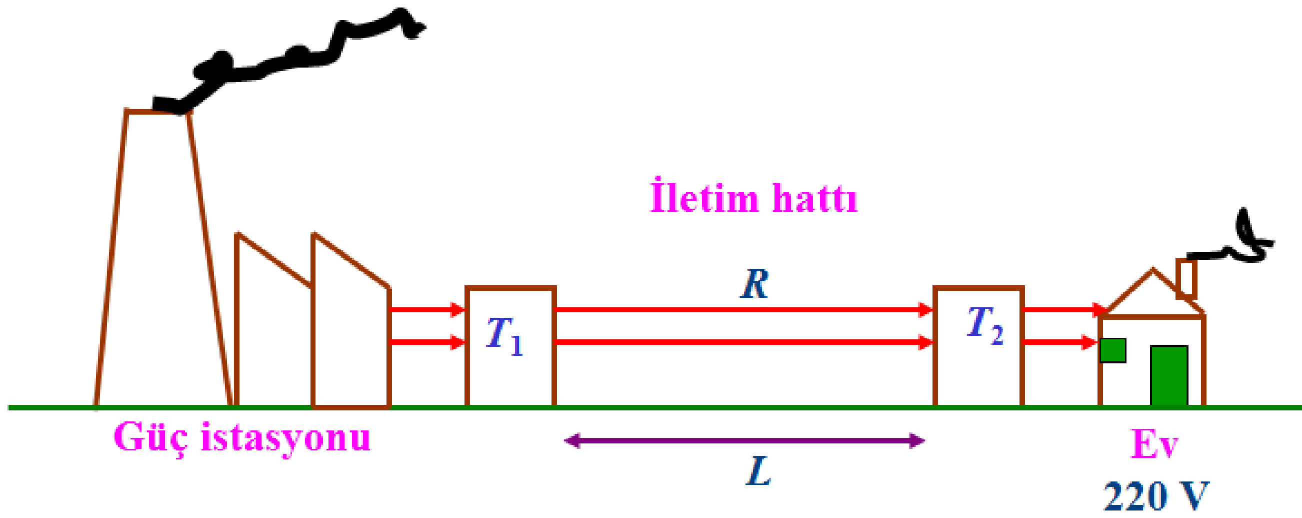
**Örnek :** Bir $RLC$ devresinde; $R = 400\ \Omega$, $L = 0.5$ mH, $C = 5\ \mu$F ve AC üretecin gerilimi $\mathcal{E}(t) = 100\sin(1000t)$ ile veriliyor. Burada $t$ saniye ve $\mathcal{E}$ volt cinsindendir. Kaynağın devreye sağladığı ortalama gücü bulunuz.

$$P_{ort} = i_{\text{kok}}\mathcal{E}_{\text{kok}}\cos\phi$$

$$\omega = 1000 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} X_L = \omega L = 0.5\ \Omega \\ X_C = \dfrac{1}{\omega C} = 200\ \Omega \end{array}\right\} \rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 447\ \Omega$$

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{100}{447} = 0.22 \text{ A} \quad ; \quad \cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{400}{447}$$

$$P_{ort} = i_{\text{kok}}\mathcal{E}_{\text{kok}}\cos\phi = \frac{i_m}{\sqrt{2}} * \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}} * \cos\phi = \frac{(0.22)*(100)}{2} * \left(\frac{400}{447}\right) \cong 10 \text{ W}$$




$P_{\text{iletim}} = 368\ \text{MW}$

$P_{\text{ısı}} = 55\ \text{MW}$

# Enerji İletim Hattı :

Güç iletim hattının direnci: $R = \rho \dfrac{l}{A}$ (tasarruf için, küçük kesit alanına sahip ince teller, yukarıdaki örnekte $R = 220\ \Omega$ olarak seçilmiştir).

İletim hattında açığa çıkan güç: $P_{\text{ısı}} = i_{\text{kok}}^2 R$ (kaybın en az olması için, akım düşük olmalı).

İletilmek istenen güç: $P_{\text{iletim}} = \mathcal{E}_{\text{kok}} i_{\text{kok}}$ (maksimum güç iletmek için, $\mathcal{E}_{\text{kok}}$ artırılmalı).

Yukarıdaki örnekte, iletim hattından geçen akım en fazla $i_{\text{kok}} = 500\ \text{A}$' dir. Dolayısıyla, iletim hattının girişinde, $\mathcal{E}_{\text{kok}} = 736\ \text{kV}$ olmalıdır. Şehir şebekesi gerilimi yaygın olarak 220 V olduğundan, iletim hattının sonunda $\mathcal{E}_{\text{kok}}$ değeri düşürülmelidir. Bunun için de, AC geriliminin genliğini artıracak veya azaltacak cihazlara ihtiyaç duyulur.

**Örnek :** Bir enerji istasyonu, 1 km uzaktaki bir kasabaya 20 MW' lık güç sağlamak istiyor. İstasyon çıkışında 22 kV olan güç bir transformatör yardımı ile 230 kV' a çıkarılıyor. İletim hattının toplam direnci 2 Ω ve elektriğin kilowatt- saat' i 0.2 TL ise, bir günlük enerji maliyetini hesaplayınız. Transformatör kullanılmadığı durum için aynı hesabı tekrar yapınız.

$$P = I\Delta V \quad \rightarrow \quad I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{20\times10^6}{230\times10^3} = 87 \text{ A}$$

İletim hattında harcanan (ısıya dönüşen) güç: $P_{ısı} = I^2R = (87)^2 \times 2 = 15 \text{ kW}$

Bir günlük toplam kayıp $= (15 \text{ kW}) \times (24 \text{ saat}) = 360 \text{ kW-saat}$

Maliyet $= (360 \text{ kW-saat}) \times (0.2 \text{ TL}) = 72 \text{ TL}$

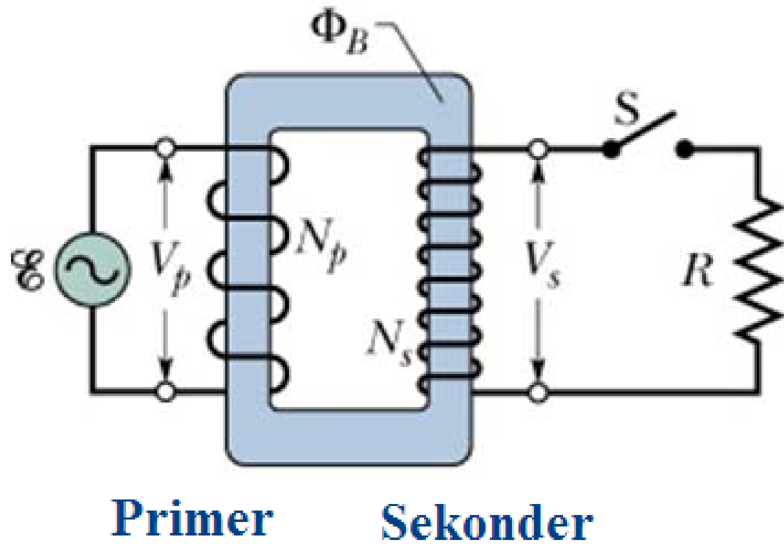
İstasyon çıkışında transformatör kullanılmasaydı:

$$P = I\Delta V \quad \rightarrow \quad I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{20\times10^6}{22\times10^3} = 910 \text{ A}$$

İletim hattında harcanan (ısıya dönüşen) güç: $P_{ısı} = I^2R = (910)^2 \times 2 \cong 1656 \text{ kW}$

Bir günlük toplam kayıp $= (1656 \text{ kW}) \times (24 \text{ saat}) = 39744 \text{ kW-saat}$

Maliyet $= (39744 \text{ kW-saat}) \times (0.2 \text{ TL}) = 7950 \text{ TL}$




# Transformatör :

AC gerilimlerin genliklerini değiştirmeye yarayan cihaz ya da aletlere "**transformatör**" adı verilir. Şekildeki gibi, aynı demir çekirdek üzerinde farklı sarım sayılarına sahip iki halkadan oluşur.

Değiştirilecek gerilime bağlı, sarım sayısı $N_P$ olan halkaya "**primer**" adı verilir. Transformatör çıkışının bağlı olduğu, sarım sayısı $N_S$ olan halkaya ise "**sekonder**" adı verilir.

Demir çekirdeğin rolü, bir halkanın manyetik alan çizgilerinin diğer halkadan da geçmesini sağlamaktır. Primer halkanın girişine $V_P$ gerilimi uyguladığımızı, sekonder halkanın çıkışından $V_S$ gerilimi aldığımızı varsayalım. Halkaların kesit alanı $A$ ve her iki halkadaki manyetik alan da $B$ olsun. Primer ve sekonder halkalardan geçen manyetik akılar ile bunların uçları arasındaki gerilimler:

$$\Phi_P = N_P BA \quad \rightarrow \quad V_P = -\frac{d\Phi_P}{dt} = -N_P A \frac{dB}{dt} \qquad \text{(Eş-1)}$$

$$\Phi_S = N_S BA \quad \rightarrow \quad V_S = -\frac{d\Phi_S}{dt} = -N_S A \frac{dB}{dt} \qquad \text{(Eş-2)}$$

bulunur. Bu iki eşitliği taraf tarafa oranlarsak:

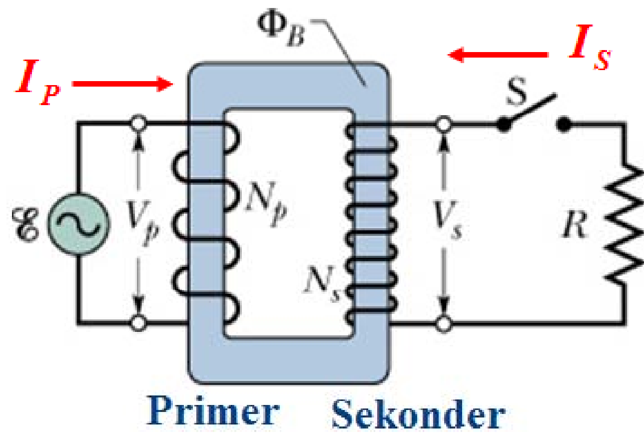
$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{-N_S A \frac{dB}{dt}}{-N_P A \frac{dB}{dt}} = \frac{N_S}{N_P} \quad \rightarrow \quad \frac{V_S}{N_S} = \frac{V_P}{N_P} \quad \rightarrow \quad V_S = V_P \frac{N_S}{N_P}$$

sonucuna ulaşılır. Halkaların birbirlerine göre sarım sayılarına bağlı olarak transformatörler farklı şekilde isimlendirilirler:

$N_S > N_P \quad \rightarrow \quad \frac{N_S}{N_P} > 1 \quad \rightarrow \quad V_S > V_P,$ bu "**yükseltici** transformatör" adını alır.

$N_S < N_P \quad \rightarrow \quad \frac{N_S}{N_P} < 1 \quad \rightarrow \quad V_S < V_P,$ bu "**düşürücü** transformatör" adını alır.

Uzak noktalara enerji iletiminde her iki transformatör türü de kullanılmaktadır.




$$\frac{V_S}{N_S}=\frac{V_P}{N_P} \quad \rightarrow \quad V_P N_S = V_S N_P \qquad \text{(Eş-1)}$$

Yandaki devrede S anahtarı kapatıldığında, primer halkadaki $I_P$ akımı yanındaki sekonder halkada da bir $I_S$ akımı oluşur. Transformatörün "**ideal**" olduğunu yani ısınma nedeniyle enerjinin kaybolmadığını varsayarsak:

$$V_P I_P = V_S I_S \qquad \text{(Eş. 2)}$$

yazılabilir. Eş-2 ve Eş-1' i taraf tarafa bölersek,

$$\frac{V_P I_P}{V_P N_S}=\frac{V_S I_S}{V_S N_P} \quad \rightarrow \quad I_P N_P = I_S N_S \quad \rightarrow \quad I_S=\frac{N_P}{N_S} I_P$$

bulunur.

Yükseltici transformatörlerde ($N_S > N_P$), sekonder halkada oluşan akım primer halkadaki akımdan küçüktür ($I_S < I_P$).

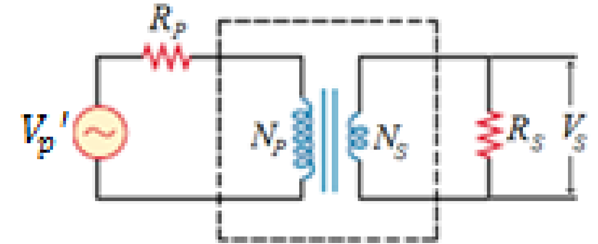
Düşürücü transformatörlerde ($N_S < N_P$), sekonder halkada oluşan akım primer halkadaki akımdan büyüktür ($I_S > I_P$).

**Örnek :** Bir transformatörün primer ve sekonder halkalarındaki sarım sayıları $N_P = 350$ ve $N_S = 2000$' dir. Primer halkanın girişine $V_P = 175\cos(\omega t)$ ifadesi ile değişen bir gerilim uygulanırsa, sekonder halkanın çıkışındaki gerilimin kok değeri ne olur?

$$\frac{V_S}{N_S} = \frac{V_P}{N_P} \quad \rightarrow \quad V_S = \frac{N_S}{N_P} V_P = \left(\frac{2000}{350}\right) * 175\cos(\omega t)$$

$$V_S = 1000\cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad (V_S)_{kok} = \frac{1000}{\sqrt{2}} = 707.1 \text{ V}$$

**Örnek :** Bir transformatörün sekonder halkasına bağlı direnç $R_S = 50\ \Omega$ ve uçları arasındaki gerilimin kok değeri $V_S = 25$ V' tur. Üreteç geriliminin kok değeri $V_p^{'} = 80$ V ve primer ile sekonder halkaların sarım sayıları oranı da $N_P / N_S = 2.5$ ise, primer halkadaki direnç ($R_P$) nedir?

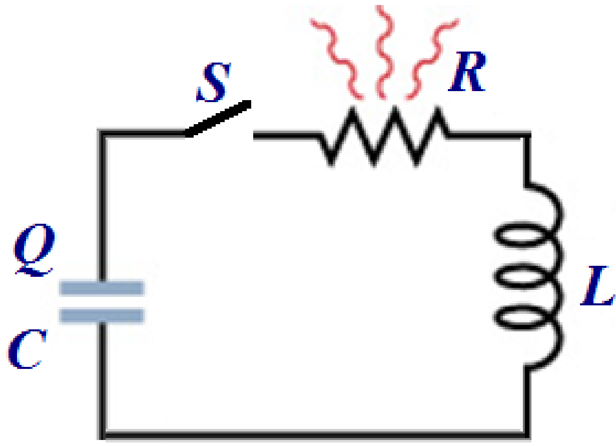



$$\frac{V_S}{N_S} = \frac{V_P}{N_P} \quad \rightarrow \quad V_P = \frac{N_P}{N_S} V_S = 2.5 * (25) = 62.5 \text{ V}$$

Üreteç gerilimi 80 V olduğuna göre, potansiyel düşmesi ($V_D$) 17.5 V olur.

$$V_P I_P = V_S I_S \quad \rightarrow \quad I_P = \frac{V_S}{V_P} I_S = \frac{V_S}{V_P}\left(\frac{V_S}{R_S}\right) = \frac{(25)^2}{(62.5)*(50)} = 0.2 \text{ A}$$

$$R_P = \frac{V_D}{I_P} = \frac{17.5}{0.2} = 87.5\ \Omega$$




# *RLC* devrelerinde sönümlü titreşim :

Şekildeki gibi, *LC* devresine bir direnç eklenirse, direnç üzerinde kayıp olacağı için enerji denklemini yeniden yazmak gerekir. Direnç üzerinde birim zamanda ısıya dönüşen enerji miktarının $\frac{dU}{dt} = -i^2 R$ olduğunu biliyoruz.

Herhangi bir anda kapasitördeki yük $q$, devreden geçen akım $i$ ise,

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = -i^2 R$$

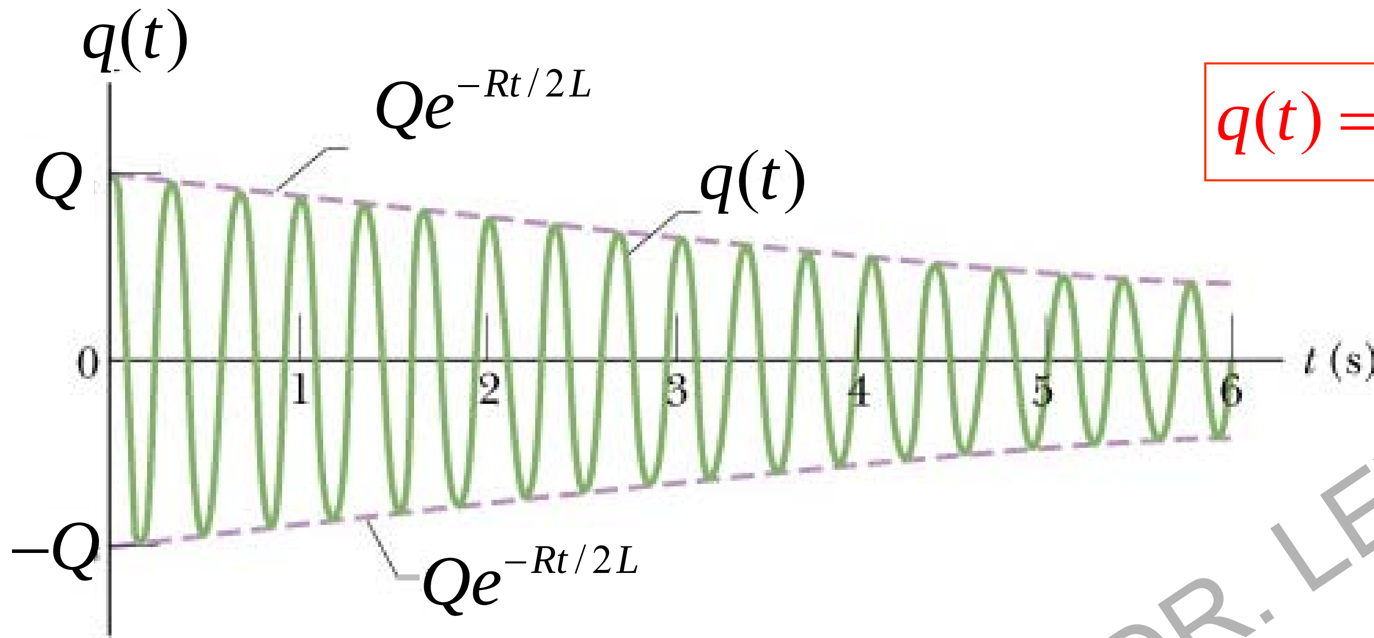
$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{ve} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad \rightarrow \quad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

Bu denklem sönümlü harmonik hareket denklemi ile aynı formdadır.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \rightarrow \quad x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \quad ; \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Bu benzerlikten dolayı, *RLC* devre denkleminin çözümü şöyedir:

$$q(t) = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi) \quad ; \quad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$




$$q(t) = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Bu eşitlik, maksimum genliği $Qe^{-Rt/2L}$ ifadesi ile değişen bir harmonik hareketi tanımlamaktadır. Genlikte zamanla bir azalma meydana geldiği için "sönümlü harmonik hareket" isimlendirmesi yapılmıştır. Sönümlü harmonik hareketin açısal frekansı, sönümün olmadığı durumdakinden daima daha küçüktür.

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad < \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$R^2/4L^2 \ll 1/LC$ durumunda, bu iki frekans yaklaşık aynı alınabilir ($\omega' \approx \omega$).

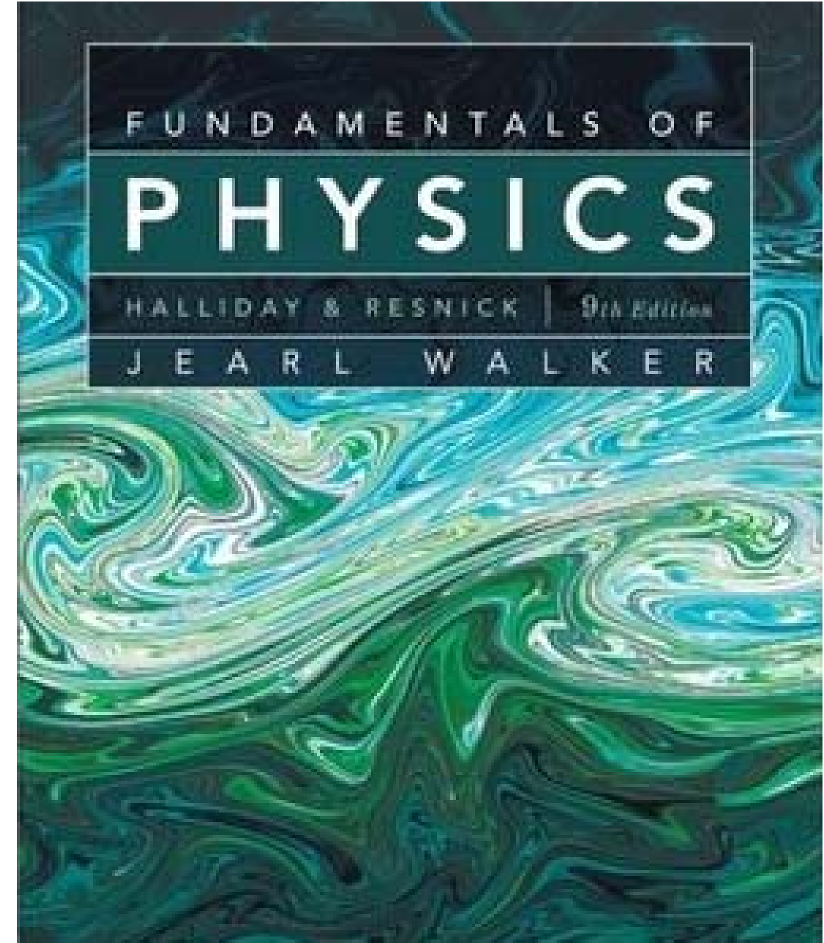
# DERS NOTLARININ

# HAZIRLANMASINDA

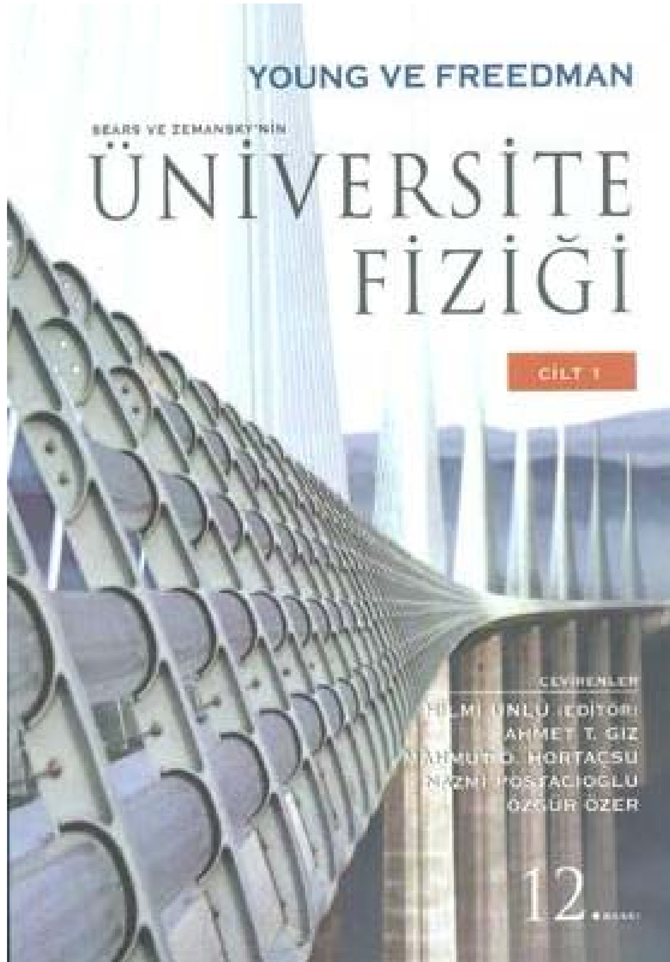
# YARARLANILAN KAYNAK KİTAPLAR

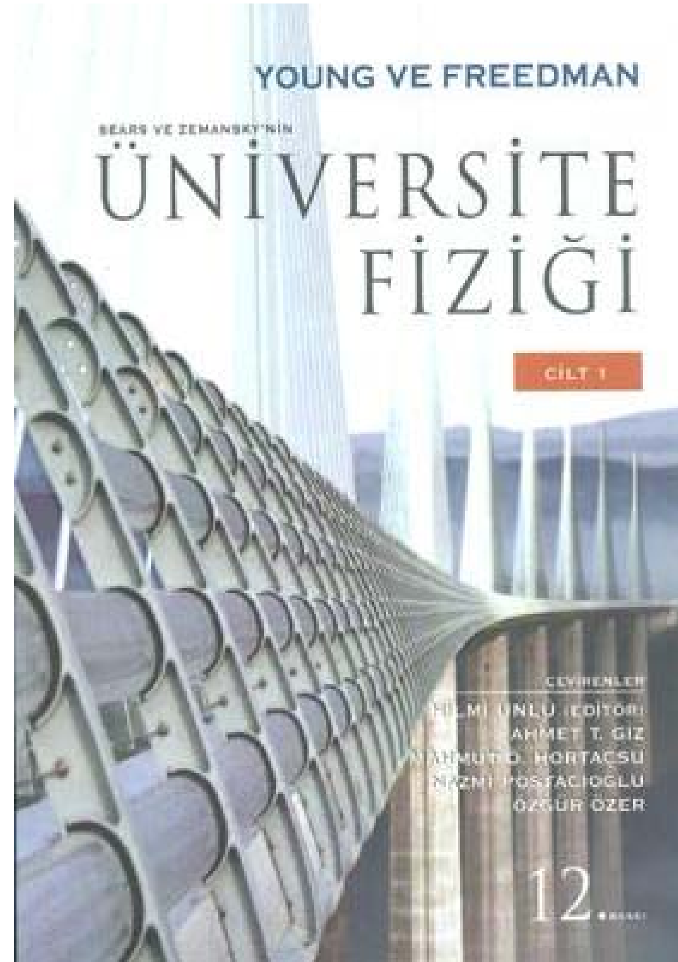
**Fiziğin Temelleri (Ders Kitabı)**
**(David HALLIDAY, Robert RESNICK, Jearl WALKER)**



**Üniversite Fiziği (Yardımcı Kitap)**
**(Hugh D. YOUNG ve Roger A. FREEDMAN)**



**Fen ve Mühendislik İçin FİZİK (Yardımcı Kitap)**
**(Raymond A. SERWAY ve John W. JEWETT)**

